Μαθηματική Λογική

Νικόλαος Σ. Παπασπύρου

Νοέμβριος 2002

Αποδείξεις κατά Hilbert/Frege

- Κλασσική προτασιακή λογική

$$A1: \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$A2: \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$A3: \quad (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$R1: \quad \frac{A \qquad A \rightarrow B}{B} \ \text{[}\textit{modus ponens}\text{]}$$

$$S1: \quad A \wedge B \quad \equiv \quad \neg(A \rightarrow \neg B)$$

$$S2: \quad A \vee B \quad \equiv \quad \neg A \rightarrow B$$

$$S3: \quad \textit{false} \quad \equiv \quad \neg(A \rightarrow A)$$

- Κλασσική κατηγορηματική λογική

$$A4: \quad (\forall x.\ A) \rightarrow A$$

$$A5: \quad (\forall x.\ A(x)) \rightarrow A(t)$$

αν το t είναι ελεύθερο για το x στο $A(x)$

$$A6: \quad \forall x.\ ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x.\ B))$$

αν το x δεν είναι ελεύθερο στο $A(x)$

$$R2: \quad \frac{A}{\forall x.\ A} \ \text{[}\textit{generalization}\text{]}$$

$$S4: \quad \exists x.\ A \quad \equiv \quad \neg(\forall x.\ \neg A)$$

Natural deduction (Gentzen)

- Κλασσική προτασιακή λογική

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ \wedge i \qquad \frac{A \wedge B}{A}\ \wedge e_1 \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ \wedge e_2$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee i_1 \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee i_2$$

$$\frac{A \vee B \qquad \boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}}}{C}\ \vee e \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}}{A \to B}\ \to i$$

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}\ \to e \qquad \frac{\mathit{false}}{A}\ \bot e$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \mathit{false} \end{array}}}{\neg A}\ \neg i \qquad \frac{A \qquad \neg A}{\mathit{false}}\ \neg e \qquad \frac{\neg\neg A}{A}\ \neg\neg$$

- Κλασσική κατηγορηματική λογική

$$\frac{\boxed{\begin{array}{ll} y & \\ & \quad\vdots \\ & A(y) \end{array}}}{\forall x.\ A(x)}\ \forall i \qquad \frac{\exists x.\ A(x) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} y & A(y) \\ & \quad\vdots \\ & \quad B \end{array}}}{B}\ \exists e$$

αν το y δεν είναι ελεύθερο έξω από τα κουτιά

$$\frac{\forall x.\ A(x)}{A(t)}\ \forall e \qquad \frac{A(t)}{\exists x.\ A(x)}\ \exists i$$

Sequent calculus

- Κλασσική προτασιακή λογική

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}\ \wedge i$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge e_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge e_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee i_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee i_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad E, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, E \vdash C}\ \vee e$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ {\to} i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ {\to} e$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathit{false}}{\Gamma \vdash A}\ \bot e \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \mathit{false}}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg i$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Gamma, \Delta \vdash \mathit{false}}\ \neg e \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ \neg\neg$$

- Κλασσική κατηγορηματική λογική

$$\frac{\Gamma \vdash A(y)}{\Gamma \vdash \forall x.\ A(x)}\ \forall i \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.\ A(x)}{\Gamma \vdash A(t)}\ \forall e$$

αν το y δεν είναι ελεύθερο στα $\Gamma, A(x)$

$$\frac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x.\ A(x)}\ \exists i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.\ A(x) \quad \Delta, A(y) \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ \exists e$$

αν το y δεν είναι ελεύθερο στα $\Gamma, A(x), B$