λ-Λογισμός και Παρεμφερή Συστήματα

Νικόλαος Σ. Παπασπύρου

Νοέμβριος 2002

λ-Λογισμός χωρίς τύπους — (i)

- Σύνταξη: $x \in V$ και $M, N \in \Lambda$

$$M, N \ ::= \ x \mid (\lambda x.\, M) \mid (M\, N)$$

- Μετατροπές

$$\begin{array}{lll l}
\lambda x.\, M & \to_\alpha & \lambda y.\, M[x := y] & y \notin \mathrm{FV}(M) \\
(\lambda x.\, M)\, N & \to_\beta & M[x := N] & \\
\lambda x.\, M\, x & \to_\eta & M & x \notin \mathrm{FV}(M)
\end{array}$$

- Συμβατές σχέσεις

$$\begin{array}{lll}
M \sim N & \Rightarrow & (M\, P) \sim (N\, P) \\
M \sim N & \Rightarrow & (P\, M) \sim (P\, N) \\
M \sim N & \Rightarrow & (\lambda x.\, M) \sim (\lambda x.\, N)
\end{array}$$

- Αναγωγές και ισότητες (κλείσιμο της $\to$)

$$\begin{array}{ll}
\twoheadrightarrow & \text{ανακλαστικό + μεταβατικό} \\
= & \text{ανακλαστικό + μεταβατικό + συμμετρικό}
\end{array}$$

λ-Λογισμός χωρίς τύπους — (ii)

- *Κανονική μορφή*
  όρος N χωρίς β και η-redex
- *Κανονικοποιήσιμος* όρος
  όρος M με $M \twoheadrightarrow N$ και N κανονική μορφή
- *Ισχυρά κανονικοποιήσιμος* όρος
  κάθε ακολουθία μετατροπών καταλήγει σε κανονική μορφή
- Παραδείγματα

$$
\begin{array}{lcl}
M_1 & \equiv & \lambda z.\,(\lambda f.\,\lambda x.\,f\,z\,x)\,(\lambda y.\,y) \\
\Omega & \equiv & (\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x) \\
M_2 & \equiv & (\lambda x.\,x\,x\,y)\,(\lambda x.\,x\,x\,y) \\
M_3 & \equiv & (\lambda z.\,y)\,((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x))
\end{array}
$$

λ-Λογισμός χωρίς τύπους — (iii)

- Θεώρημα *Church-Rosser*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ N_1 \arrow[dr, dotted] & & N_2 \arrow[dl, dotted] \\ & N & \end{tikzcd}$$

- *Μοναδικότητα κανονικών* μορφών
  αν υπάρχουν και modulo $=_\alpha$

- Θεώρημα *κανονικοποίησης*
  Αν ο όρος M έχει κανονική μορφή, τότε η μετατροπή του *αριστερότερου* redex οδηγεί σε αυτήν

- Τελεστής *σταθερού σημείου*: $F\,(Y\,F) = Y\,F$

  $$Y \quad \equiv \quad \lambda f.\,(\lambda x.\,f\,(x\,x))\,(\lambda x.\,f\,(x\,x))$$

Εκφραστική δύναμη του λ-λογισμού

- Λογικές τιμές

$$\begin{aligned}
\mathbf{true} &\equiv \lambda x.\,\lambda y.\,x \\
\mathbf{false} &\equiv \lambda x.\,\lambda y.\,y \\
\mathbf{not} &\equiv \lambda z.\,z\,\mathbf{false}\,\mathbf{true}
\end{aligned}$$

- Διατεταγμένα ζεύγη

$$\begin{aligned}
\mathbf{pair} &\equiv \lambda x.\,\lambda y.\,\lambda z.\,z\,x\,y \\
\mathbf{fst} &\equiv \lambda z.\,z\,\mathbf{true} \\
\mathbf{snd} &\equiv \lambda z.\,z\,\mathbf{false}
\end{aligned}$$

- Φυσικοί αριθμοί (αριθμοειδή του Church)

$$\mathbf{c}_n \equiv \lambda f.\,\lambda x.\,f^n(x)$$

$$\begin{aligned}
F^0(A) &\equiv A \\
F^{n+1}(A) &\equiv F\,(F^n(A))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{succ} &\equiv \lambda n.\,\lambda f.\,\lambda x.\,n\,f\,(f\,x) \\
\mathbf{A}_+ &\equiv \lambda n.\,\lambda m.\,\lambda f.\,\lambda x.\,n\,f\,(m\,f\,x) \\
\mathbf{A}_* &\equiv \lambda n.\,\lambda m.\,\lambda f.\,n\,(m\,f) \\
\mathbf{A}_{\exp} &\equiv \lambda n.\,\lambda m.\,m\,n
\end{aligned}$$

λ-Λογισμός με τύπους

- Τύποι à-la Curry

$$\frac{(x : \sigma) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x.\, M) : (\sigma \to \tau)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : (\sigma \to \tau) \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (M\, N) : \tau}$$

- Τύποι à-la Church ($\lambda_{\to}$)
  - *Τύποι*: $\alpha \in \mathcal{V}$ και $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$
  - *Όροι*: $x \in V$ και $M, N \in \Lambda$

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau & ::= & \alpha \mid (\sigma \to \tau) \\ M, N & ::= & x \mid (\lambda x : \sigma.\, M) \mid (M\, N) \end{array}$$

$$\frac{(x : \sigma) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma} \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma.\, M) : (\sigma \to \tau)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : (\sigma \to \tau) \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (M\, N) : \tau}$$

  - Μοναδικότητα τύπων
  - Ισχυρή κανονικοποίηση

Σύστημα F_2

- Σύνταξη
  - *Τύποι*: $\alpha \in \mathcal{V}$ και $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$
  - *Όροι*: $x \in V$ και $M, N \in \Lambda$

$$
\begin{array}{lcl}
\sigma, \tau & ::= & \alpha \mid (\sigma \to \tau) \mid (\forall \alpha.\, \sigma) \\
M, N & ::= & x \mid (\lambda x : \sigma.\, M) \mid (M\, N) \\
 & \mid & (\Lambda \alpha.\, M) \mid (M\,[\sigma])
\end{array}
$$

- Επιπλέον μετατροπές

$$
\begin{array}{llll}
\Lambda \alpha.\, M & \to_\alpha & \Lambda \beta.\, M[\alpha := \beta] & \beta \notin \mathrm{FV}(M) \\
(\Lambda \alpha.\, M)\,[\sigma] & \to_\beta & M[\alpha := \sigma] & \\
\Lambda \alpha.\, M\,[\alpha] & \to_\eta & M & \alpha \notin \mathrm{FV}(M)
\end{array}
$$

- Κανόνες τύπων

$$
\frac{(x : \sigma) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma}
\qquad
\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma.\, M) : (\sigma \to \tau)}
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash M : (\sigma \to \tau) \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (M\, N) : \tau}
$$

$$
\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\Lambda \alpha.\, M) : (\forall \alpha.\, \sigma)} \quad \alpha \notin \mathrm{FV}(\Gamma)
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash M : (\forall \alpha.\, \sigma)}{\Gamma \vdash (M\,[\tau]) : \sigma[\alpha := \tau]}
$$

Σύστημα F_ω — (i)

- Σύνταξη
  - *Είδη*: $\kappa \in \mathcal{K}$
  - *Τύποι*: $\alpha \in \mathcal{V}$ και $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$
  - *Όροι*: $x \in V$ και $M, N \in \Lambda$

$$
\begin{array}{lcl}
\kappa & ::= & * \mid \kappa \to \kappa' \\
\sigma, \tau & ::= & \alpha \mid (\sigma \to \tau) \mid (\forall \alpha : \kappa.\ \sigma) \\
& \mid & (\lambda \alpha : \kappa. \sigma) \mid \sigma\, \tau \\
M, N & ::= & x \mid (\lambda x : \sigma.\, M) \mid (M\, N) \\
& \mid & (\Lambda \alpha : \kappa.\, M) \mid (M\, [\sigma])
\end{array}
$$

- Επιπλέον μετατροπές

$$
\begin{array}{llll}
\lambda \alpha : \kappa.\, \sigma & \to_\alpha & \lambda \beta : \kappa.\, \sigma[\alpha := \beta] & \beta \notin \mathrm{FV}(\sigma) \\
(\lambda \alpha : \kappa.\, \sigma)\, \tau & \to_\beta & \sigma[\alpha := \tau] & \\
\lambda \alpha : \kappa.\, \sigma\, \alpha & \to_\eta & \sigma & \alpha \notin \mathrm{FV}(\sigma)
\end{array}
$$

Σύστημα F_ω — (ii)

- Κανόνες τύπων

$$\frac{(x : \sigma) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma} \qquad \frac{(\alpha : \kappa) \in \Gamma}{\Gamma \vdash \alpha : \kappa} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash * : \Box}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \kappa : \Box \qquad \Gamma \vdash \kappa' : \Box}{\Gamma \vdash (\kappa \to \kappa') : \Box} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma : * \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash (\sigma \to \tau) : *}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \kappa : \Box \qquad \Gamma, \alpha : \kappa \vdash \sigma : *}{\Gamma \vdash \forall \alpha : \kappa .\ \sigma : *}\ (\pi)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \kappa : \Box \qquad \Gamma, \alpha : \kappa \vdash \sigma : \kappa'}{\Gamma \vdash (\lambda \alpha : \kappa . \sigma) : (\kappa \to \kappa')}\ (\pi)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma : (\kappa \to \kappa') \qquad \Gamma \vdash \tau : \kappa}{\Gamma \vdash (\sigma\, \tau) : \kappa'}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma : * \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma . M) : (\sigma \to \tau)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : (\sigma \to \tau) \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (M\, N) : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \kappa : \Box \qquad \Gamma, \alpha : \kappa \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\Lambda \alpha : \kappa . M) : (\forall \alpha : \kappa .\ \sigma)}\ (\pi)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : (\forall \alpha : \kappa .\ \sigma) \qquad \Gamma \vdash \tau : \kappa}{\Gamma \vdash (M\, [\tau]) : \sigma[\alpha := \tau]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \sigma = \tau \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : \tau}$$

όπου $\pi \ :\ \alpha \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$

Εξαρτώμενοι τύποι — λP

- Σύνταξη

$$
\begin{array}{lcl}
\kappa & ::= & * \mid \sigma \to \kappa \\
\sigma, \tau & ::= & \alpha \mid (\Pi x : \sigma.\ \tau) \mid (\lambda x : \sigma.\tau) \mid \sigma\, M \\
M, N & ::= & x \mid (\lambda x : \sigma.\, M) \mid (M\, N)
\end{array}
$$

- Κανόνες τύπων

$$
\frac{(x : \sigma) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma} \qquad \frac{(\alpha : \kappa) \in \Gamma}{\Gamma \vdash \alpha : \kappa} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash * : \Box}
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash \sigma : * \qquad \Gamma \vdash \kappa : \Box}{\Gamma \vdash (\sigma \to \kappa) : \Box} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma : * \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash (\Pi x : \sigma.\ \tau) : *}
$$

$$
\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash \tau : \kappa}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma.\tau) : (\sigma \to \kappa)}
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash \sigma : (\tau \to \kappa) \qquad \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\sigma\, M) : \kappa}
$$

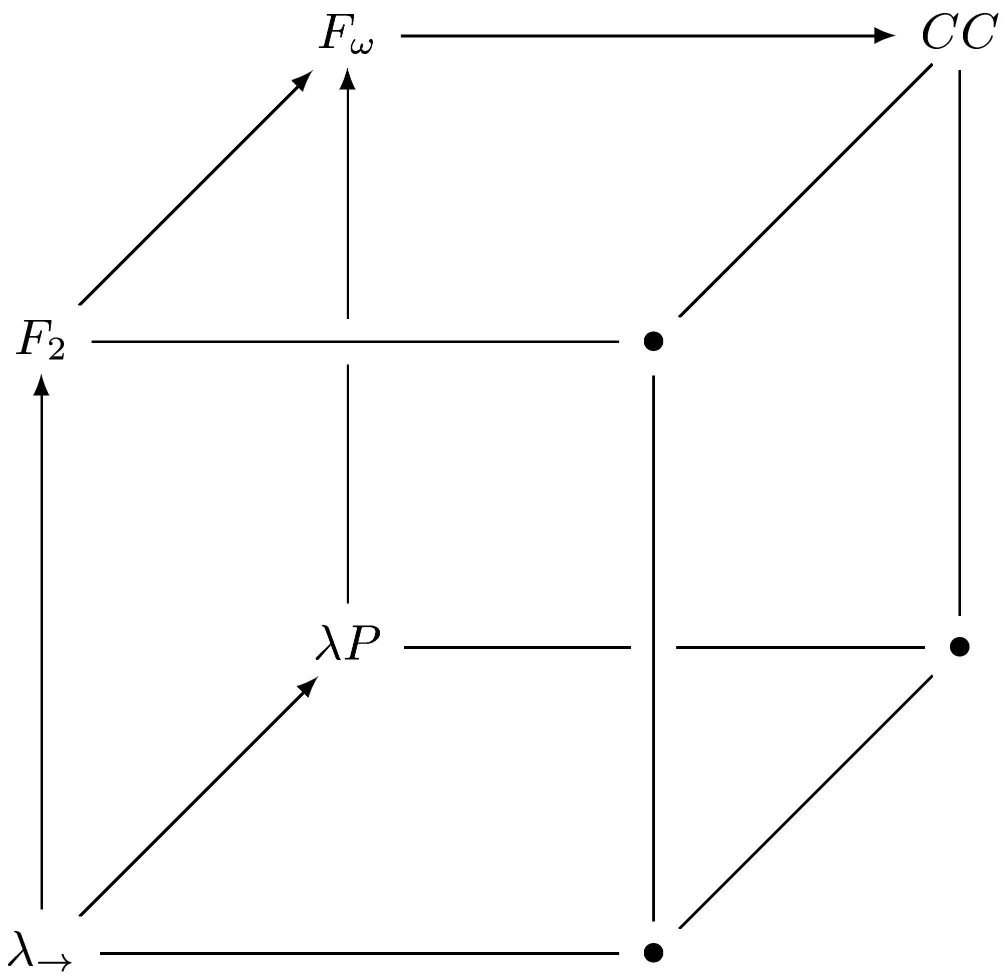
$$
\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau \qquad \Pi x : \sigma.\ \tau : *}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma.\, M) : (\Pi x : \sigma.\ \tau)}
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash M : (\Pi x : \sigma.\ \tau) \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (M\, N) : \tau[x := N]}
$$

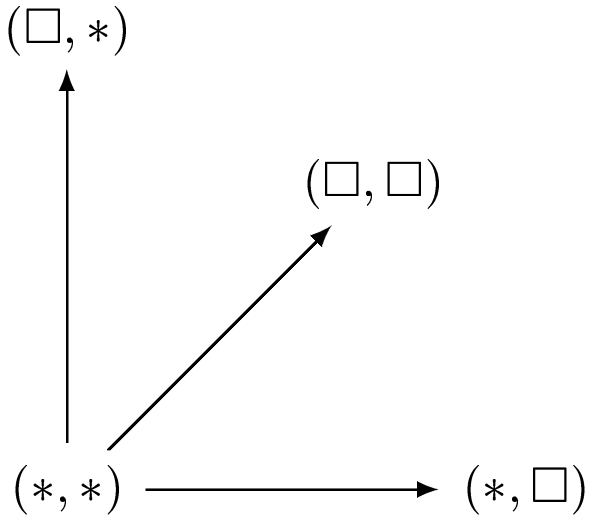
$$
\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \sigma = \tau \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : \tau}
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash \sigma : \kappa \qquad \kappa = \kappa' \qquad \Gamma \vdash \kappa' : \Box}{\Gamma \vdash \sigma : \kappa'}
$$

Ο κύβος του Barendregt



Υπόμνημα



$*$	όροι
$\Box$	τύποι

Π.χ. $(\Box, *)$
όροι που εξαρτώνται από *τύπους*