# Υπολογισμοί με Μηχανές Turing

**Δημήτρης Φωτάκης**

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

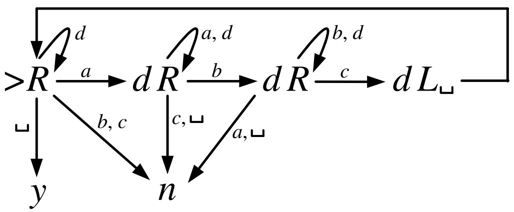
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

# Αναγνώριση Γλωσσών από Μηχανές Turing

- Θεωρούμε Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$
- **Είσοδος** $w \in \Sigma - \{\triangleright, \sqcup\}$ δίνεται ως $\triangleright\underline{\sqcup}w$
  **Αρχική** συνολική κατάσταση της $M$ με είσοδο $w$ ($M(w)$): $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w)$
- Έστω $H = \{y, n\}$. Συνολική κατάσταση **αποδοχής**: $(y,$ **οτιδήποτε**$)$
  Συνολική κατάσταση **απόρριψης**: $(n,$ **οτιδήποτε**$)$
- $M$ **δέχεται** είσοδο $w \in \Sigma - \{\triangleright, \sqcup\}$ ($M(w) = \text{ΝΑΙ}$): $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (y, \text{οτδπ})$
- $M$ **απορρίπτει** $w \in \Sigma - \{\triangleright, \sqcup\}$ ($M(w) = \text{ΟΧΙ}$): $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (n, \text{οτδπ})$
- Έστω $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\triangleright, \sqcup\}$ **αλφάβητο εισόδου** (δυνατότητα βοηθητικών συμβόλων).
- $M$ **αποφασίζει** γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$:
  – αν $w \in L$, τότε $M$ **αποδέχεται** $w$ – $M(w) = \text{ΝΑΙ}$
  – αν $w \notin L$, τότε $M$ **απορρίπτει** $w$ – $M(w) = \text{ΟΧΙ}$
- $L$ ονομάζεται **αποφασίσιμη** ή **αναδρομική** αν $\exists$ Μ.Τ. που την αποφασίζει.



# Αναγνώριση Γλωσσών




- Γλώσσα $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$. Δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
- Απόφαση: $M$ **τερματίζει** για κάθε $w \in \Sigma_0^*$.
  Αδιάφορο τι συμβαίνει για $w \notin \Sigma_0^*$.
- Αλλά μια Μ.Τ. μπορεί να **μην τερματίσει** για κάποιο $w$!
  Ούτε αποδέχεται, ούτε απορρίπτει!
- Αυτόματα **τερματίζουν πάντα** και είτε αποδέχονται είτε όχι.
- Πως θα αποφανθούμε αν μία Μ.Τ. τερματίζει **για κάθε** $w \in \Sigma_0^*$;

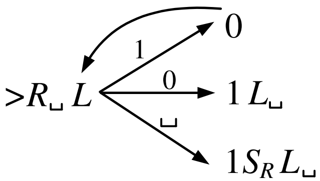


# Υπολογισμός Συναρτήσεων

- Μ.Τ. μπορούν να **παράγουν έξοδο** και να υπολογίσουν **συναρτήσεις**.
  Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ με αλφάβητο $\Sigma_0^* \subseteq \Sigma - \{\triangleright, \sqcup\}$ .
- Αν $M(w)$ τερματίζει και $(s, \triangleright\underline{\sqcup}w) \vdash_M^* (h, \triangleright\underline{\sqcup}u)$ για κάποιο $u \in \Sigma_0^*$,
  λέμε ότι $M$ με **είσοδο** $w$ έχει **έξοδο** $u$ ($M(w) = u$).
- Έξοδος $M(w)$ ορίζεται **μόνο αν** τερματισμός σε $(h, \triangleright\underline{\sqcup}u)$.
- $M$ υπολογίζει συνάρτηση $f : \Sigma_0^* \mapsto \Sigma_0^*$ αν **για κάθε** $w \in \Sigma_0^*$, $M(w) = f(w)$,
  δηλ. $M$ τερματίζει με είσοδο $w$ σε $(h, \triangleright\underline{\sqcup}f(w))$.
- $f$ ονομάζεται **υπολογίσιμη** ή **αναδρομική** αν $\exists$ Μ.Τ. που την υπολογίζει.
- Π.χ. συνάρτηση $f(w) = w\sqcup w$ υπολογίζεται από $R_\sqcup C L_\sqcup^2$, όπου
  $C$ είναι Μ.Τ. αντιγραφής: $(s_C, \triangleright\sqcup w\underline{\sqcup}) \vdash_C^* (h_C, \triangleright\sqcup w\sqcup w\underline{\sqcup})$.

## Υπολογισμός Αριθμητικών Συναρτήσεων

- Δυαδικές συμβολοσειρές αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς. Αναπαράσταση από συνάρτηση $\mathrm{num} : 1(1 \cup 0)^* \cup 0 \mapsto \mathbb{N}$, όπου
$$\mathrm{num}(w) = 2^{n-1} w_1 + 2^{n-2} w_2 + \ldots 2 w_{n-1} + w_n$$
- Μ.Τ. που υπολογίζει **συναρτήσεις** $\{0,1\}^* \mapsto \{0,1\}^*$ μπορεί να θεωρηθεί ότι υπολογίζει **συναρτήσεις** $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$.
Πολλές μεταβλητές, **;** διαχωριστικό και **συναρτήσεις** $\{0,1,;\}^* \mapsto \{0,1\}^*$
- Συνάρτηση $f : \mathbb{N}^k \mapsto \mathbb{N}$ και Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$ με $\{0, 1, ;\} \subseteq \Sigma_0$.
- $M$ **υπολογίζει** $f$ αν για κάθε $w_1, \ldots, w_k \in 1(1 \cup 0)^* \cup 0$,
$$\mathrm{num}(M(w_1; \ldots; w_k)) = f(\mathrm{num}(w_1), \ldots, \mathrm{num}(w_k))$$
- $f$ ονομάζεται **υπολογίσιμη** ή **αναδρομική** αν $\exists$ Μ.Τ. που την υπολογίζει.
- Συνάρτηση διαδοχής $f(n) = n+1$






## Ημι-αναγνώριση Γλωσσών

- Απόφαση γλώσσας από Μ.Τ. $\equiv$ **αλγόριθμος** αναγνώρισης γλώσσας.
Υπολογισμός συνάρτησης από Μ.Τ. $\equiv$ **αλγόριθμος** υπολογισμού.
- Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ με $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup, \triangleright\}$ και γλώσσα $L \subseteq S_0^*$.
- $M$ **ημιαποφασίζει** την $L$ αν $\forall w \in \Sigma_0^*$, $M(w)$ **τερματίζει ανν** $w \in L$.
- **Τερματισμός** (ανεξ. κατάστασης) δηλώνει ότι $w \in L$.
**Μη-τερματισμός** ($M(w) = \nearrow$) δηλώνει ότι $w \notin L$ (τερματισμός "σε λίγο";).
- $L$ ονομάζεται **ημιαποφασίσιμη** ή **αναδρομικά απαριθμήσιμη** αν υπάρχει Μ.Τ. που την ημιαποφασίζει.
- Μ.Τ. που ημι-αποφασίζει $L = \{w \in \{0,1\}^* :$ η $w$ έχει τουλάχιστον ένα $0\}$:
$R$ ενόσω διαβάζει $\neq 0$. Αν διαβάσει 0, τερματισμός.
- Μ.Τ. που ημι-αποφασίζουν **δεν** είναι αλγόριθμοι.
Ποτέ δεν ξέρουμε αν έχουμε **περιμένει αρκετά**!



## Αναδρομικές – Αναδρομικά Απαριθμήσιμες Γλώσσες

- Κάθε **αναδρομική** γλώσσα $L$ είναι **αναδρομικά απαριθμήσιμη**.
- Έστω Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ που αποφασίζει $L$.
$L$ **ημιαποφασίζεται** από $M'(K, \Sigma, \delta', s, \{y\})$ που προκύπτει από $M$ με επιπλέον μεταβάσεις $\delta'(n, \sigma) = \delta'(n, \sigma)$, $\forall \sigma$.
- Είναι αναδρομικές **όλες** οι αναδρομικά **απαριθμήσιμες** γλώσσες;
- Αν $L$ είναι **αναδρομική** γλώσσα, το $\overline{L}$ είναι **αναδρομική** γλώσσα.
Αναδρομικές γλώσσες είναι **κλειστές ως προς συμπλήρωμα**.
- Έστω Μ.Τ. $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{y, n\})$ που αποφασίζει $L$
Με **αντιστροφή ρόλου** για τις καταστάσεις $y$ **και** $n$ αποφασίζεται $\overline{L}$.
$\overline{L}$ αποφασίζεται από Μ.Τ. $M' = (K, \Sigma, \delta', s, \{y, n\})$ με
$$\delta'(q,\sigma) = \begin{cases} n & \text{αν } \delta(q,\sigma) = y \\ y & \text{αν } \delta(q,\sigma) = n \\ \delta(q,\sigma) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$
- Γλώσσα $L$ **αναδρομική ανν** $L$ και $\overline{L}$ **αναδρομικά απαριθμήσιμες**.