

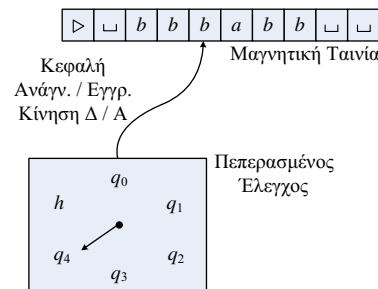
# Μηχανές Turing

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων  
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

# Μηχανές Turing

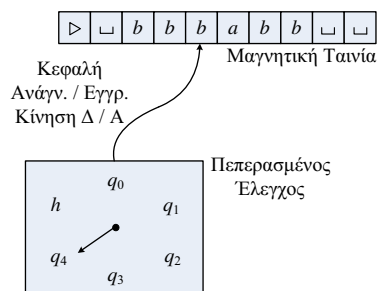
- **Στόχος**: τυπικός ορισμός έννοιας **αλγόριθμου**.  
Υπολογιστικό μοντέλο που υπολογίζει ότι υπολογίζουν προγράμματα C.
- Αυτόματα στοίβας **δεν** αναγνωρίζουν απλές γλώσσες, π.χ.  $\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ .
- Τι λείπει από αυτόματα για να αποτελέσουν **ισχυρό** υπολογιστικό μοντέλο;
- Μηχανές Turing: αυτόματα με **μνήμη**.  
Άπειρη ταινία που **διαβάζεται** και **γράφεται** από κεφαλή με δυνατότητα **κίνησης** αριστερά και δεξιά.
- Μ.Τ. απλές, σχεδόν πρωτόγονες.  
Αποτελούν **σταθερή** και **μέγιστη** κλάση αυτομάτων ως προς υπολογισμό.



# Μηχανές Turing

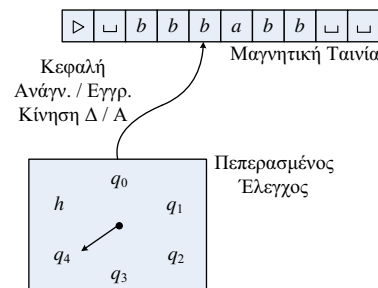
- Αποτελούνται από (α) **μονάδα ελέγχου** πεπερασμένων καταστάσεων, (β) άπειρη **ταινία**, και (γ) **κεφαλή** ανάγνωσης / εγγραφής.
- Λειτουργούν σε **διακριτά** βήματα παρόμοια με αυτόματα.
- Ταινία εκτείνεται **απεριόριστα** δεξιά. Περιέχει **σύμβολα** και **κενά** ( $\square$ ).
- $\triangleright$  δηλώνει **όριο** στα αριστερά.
- Είσοδος  $w$  στο **αριστερό άκρο** ταινίας:  $\triangleright \square w \square \square \dots$
- Υπολογισμός (πεπερασμένος) χρησιμοποιεί **πεπερασμένη** ταινία.

- Διαφορές από αυτόματα:
  - Διαβάζει και **γράφει** στην ταινία.  
Κίνηση κεφαλής **κατά βούληση**.  
Επαρκής μνήμη (προσπέλαση);).
  - Καταστάσεις αποδοχής / απόρριψης **διακόπτουν** υπολογισμό.



# Λειτουργία Μηχανών Turing

- Κάθε βήμα εκτελεί **δύο** λειτουργίες που εξαρτώνται από **τρέχουσα κατάσταση** και **σύμβολο** που διαβάζει κεφαλή στην **ταινία**:
  - Μονάδα ελέγχου μεταβαίνει σε **νέα κατάσταση**, και
  - είτε **γράφει** σύμβολο στην τρέχουσα θέση ταινίας, είτε **μετακινεί** κεφαλή μία θέση αριστερά  $\leftarrow$  ή δεξιά  $\rightarrow$
- Όποτε κεφαλή διαβάζει  $\triangleright$ , μετακινείται **μια θέση δεξιά**.
- Μ.Τ. αποφασίζει αν  $w \in L$ :
  - **ναι** αν τερματισμός σε αποδοχή,
  - **όχι** αν τερματισμός σε απόρριψη.
- Μ.Τ. υπολογίζει **συνάρτηση**  $f(w)$ :  
τερματίζει αφού **γράφει** τιμή  $f(w)$  στην ταινία.



## Ορισμός Μηχανών Turing

Μηχανή Turing  $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$ :

- $K$  πεπερασμένο σύνολο **καταστάσεων**
- $\Sigma$  **αλφάβητο**  $\sqcup, \triangleright \in \Sigma$  και  $\leftarrow, \rightarrow \notin \Sigma$
- $s \in K$  **αρχική** κατάσταση
- $H \subseteq K$  **τελικές** καταστάσεις: είτε  $H = \{y, n\}$  είτε  $H = \{h\}$
- $\delta$  **συνάρτηση μετάβασης**:  $(K - H) \times \Sigma \mapsto K \times ((\Sigma - \{\triangleright\}) \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})$ 
  - Για κάθε  $q \in K - H$ ,  $\delta(q, \triangleright) = (p, \rightarrow)$
  - $\delta(q, a) = (p, b)$  μετάβαση σε κατάσταση  $p$  και
    - αν  $b \in \Sigma - \{\triangleright\}$ , **αντικατάσταση  $a$  με  $b$**  στην ταινία
    - αν  $b \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$ , **μετακίνηση** κεφαλής μία θέση στην κατεύθυνση  $b$
    - αν  $p \in H$ , άμεσος **τερματισμός**

## Παράδειγμα Μηχανής Turing

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$$

$$K = \{q_0, q_1, h\}$$

$$\Sigma = \{a, \sqcup, \triangleright\}$$

$$s = q_0$$

$$H = \{h\}$$

$q \in K - H$	$\sigma \in \Sigma$	$\delta(q, \sigma)$
$q_0$	$a$	$(q_1, \sqcup)$
$q_0$	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
$q_0$	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$
$q_1$	$a$	$(q_0, a)$
$q_1$	$\sqcup$	$(q_0, \rightarrow)$
$q_1$	$\triangleright$	$(q_1, \rightarrow)$

- Υπολογισμός με είσοδο  $\triangleright \underline{a}aaaaa$ ;
- Λειτουργία  $M$ ;
- Σαρώνει ταινία προς τα δεξιά **αντικαθιστώντας  $a$  με  $\sqcup$** . Τερματίζει σε πρώτο  $\sqcup$ .

## Παράδειγμα Μηχανής Turing

$$M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$$

$$K = \{q_0, h\}$$

$$\Sigma = \{a, \sqcup, \triangleright\}$$

$$s = q_0$$

$$H = \{h\}$$

$q \in K - H$	$\sigma \in \Sigma$	$\delta(q, \sigma)$
$q_0$	$a$	$(q_0, \leftarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$
$q_0$	$\triangleright$	$(q_0, \rightarrow)$

- Μ.Τ. μπορεί να **μην τερματίζουν** για κάποιες εισόδους! Πεπερασμένα Αυτόματα τερματίζουν πάντα.

- Υπολογισμός με εισόδους  $\triangleright \sqcup aaaa \underline{a}$  και  $\triangleright \underline{a}$ ;
- Λειτουργία  $M$ ;
- Σαρώνει προς τα αριστερά. Τερματίζει σε πρώτο  $\sqcup$ . Αν **κανένα  $\sqcup$  πριν  $\triangleright$  “κολλάει”**.

## Συνολική Κατάσταση Υπολογισμού

- Τρέχουσα **κατάσταση**, περιεχόμενα **ταινίας**, και **θέση κεφαλής**. Αγνοούμε (άπειρα) συνεχόμενα κενά στο δεξιό μέρος ταινίας.
- **Συνολική κατάσταση** Μ.Τ.  $M(K, \Sigma, \delta, s, H)$  είναι **τριάδα** του  $K \times \triangleright \Sigma^* \times (\Sigma^* (\Sigma - \{\sqcup\}) \cup \{\varepsilon\})$
- 1ο μέρος: τρέχουσα κατάσταση. 2ο μέρος αρχίζει με  $\triangleright$  και τελειώνει με σύμβολο σε τρέχουσα θέση κεφαλής. 3ο μέρος δεν τελειώνει με  $\sqcup$ .
- **Τερματισμένη** συνολική κατάσταση αν τρέχουσα κατάσταση στο  $H$ .
- Π.χ.  $(q, \triangleright a, aba)$ ,  $(h, \triangleright \sqcup \sqcup \sqcup, \sqcup a)$ ,  $(q, \triangleright \sqcup a \sqcup \sqcup, \varepsilon)$ , αλλά **όχι**  $(q, \triangleright aa, a \sqcup)$ .
- $(q, wa, u)$  γράφεται συντομότερα  $(q, w \underline{a} u)$ . Π.χ.  $(q, \triangleright \underline{a} aba)$ ,  $(h, \triangleright \sqcup \sqcup \sqcup \underline{\sqcup} a)$ ,  $(q, \triangleright \sqcup a \sqcup \underline{\sqcup})$ .
- Στο  $(q, w \underline{a} u)$ ,  **$wau$  δεν τελειώνει με  $\sqcup$  εκτός αν  $\sqcup$  είναι το σύμβολο στην τρέχουσα θέση κεφαλής.**

## Παράγει σε Ένα Βήμα

- Μ.Τ.  $M(K, \Sigma, \delta, s, H)$  και συνολικές καταστάσεις  $(q_1, w_1 \underline{a_1} u_1)$  και  $(q_2, w_2 \underline{a_2} u_2)$ . Τότε  $(q_1, w_1 \underline{a_1} u_1) \vdash_M (q_2, w_2 \underline{a_2} u_2)$  ανν για κάποιο  $b \in \Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}$ ,  $\delta(q_1, a_1) = \delta(q_2, b)$  και
  1. είτε  $b \in \Sigma$ ,  $w_1 = w_2$ ,  $u_1 = u_2$ , και  $a_2 = b$ .  
 $(q_0, \triangleright \sqcup \underline{aaa}) \vdash_{M_1} (q_1, \triangleright \sqcup \underline{aa})$   
 $(q_1, w \underline{a} u) \vdash_M (q_2, w \underline{b} u)$  αν  $\delta(q_1, a) = \delta(q_2, b)$
  2. είτε  $b = \leftarrow$ ,  $w_1 = w_2 a_2$ , και
    - (a) είτε  $u_2 = a_1 u_1$  αν  $a_1 \neq \sqcup$  ή  $u_1 \neq \varepsilon$ ,
    - (b) είτε  $u_2 = \varepsilon$  αν  $a_1 = \sqcup$  και  $u_1 = \varepsilon$ .  
 $(q_0, \triangleright \underline{aaaaaa}) \vdash_{M_2} (q_2, \triangleright \underline{aaaaaa})$   
 $(q_1, w \underline{a} u) \vdash_M (q_2, w \underline{a} u)$  ή  $(q_1, w \underline{c} \sqcup) \vdash_M (q_2, w \underline{c} \sqcup)$  αν  $\delta(q_1, a) = \delta(q_2, \leftarrow)$
  3. είτε  $b = \rightarrow$ ,  $w_2 = w_1 a_1$ , και
    - (a) είτε  $u_1 = a_2 u_2$  αν  $u_1 \neq \varepsilon$ ,
    - (b) είτε  $u_2 = \varepsilon$  και  $a_2 = \sqcup$  αν  $u_1 = \varepsilon$ .  
 $(q_1, \triangleright \sqcup \underline{aa}) \vdash_{M_1} (q_2, \triangleright \sqcup \underline{aa})$   
 $(q_1, w \underline{a} c u) \vdash_M (q_2, w \underline{a} c u)$  ή  $(q_1, w \underline{a} \sqcup) \vdash_M (q_2, w \underline{a} \sqcup)$  αν  $\delta(q_1, a) = \delta(q_2, \rightarrow)$

## Παράγει σε Κάποια Βήματα

- Μ.Τ.  $M$  και συνολικές καταστάσεις  $C, C'$ :  $C \vdash_M^* C'$  ανν υπάρχουν συνολικές καταστάσεις  $C = C_0, C_1, \dots, C_n = C'$  ώστε

$$C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M \dots \vdash_M C_n$$

- Υπολογισμός έχει  $n$  βήματα (συμβ.  $C \vdash_M^n C'$ ).
- $(q_1, \triangleright \underline{aaaa}) \vdash_{M_1}^* (h, \triangleright \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup)$

$$\begin{aligned} (q_1, \triangleright \underline{aaaa}) &\vdash_{M_1} (q_0, \triangleright \underline{aa} \underline{aa}) \\ &\vdash_{M_1} (q_1, \triangleright \underline{a} \underline{aa}) \\ &\vdash_{M_1} (q_0, \triangleright \underline{\sqcup} \underline{aa}) \\ &\vdash_{M_1} (q_1, \triangleright \underline{\sqcup} \underline{a}) \\ &\vdash_{M_1} (q_0, \triangleright \underline{\sqcup} \underline{\sqcup} \underline{a}) \\ &\vdash_{M_1} (q_1, \triangleright \underline{\sqcup} \underline{\sqcup} \underline{\sqcup}) \\ &\vdash_{M_1} (q_0, \triangleright \underline{\sqcup} \underline{\sqcup} \underline{\sqcup} \underline{\sqcup}) \\ &\vdash_{M_1} (h, \triangleright \underline{\sqcup} \underline{\sqcup} \underline{\sqcup} \underline{\sqcup}) \end{aligned}$$

## Βασικές Μηχανές Turing

- Μηχανές **εγγραφής συμβόλων**  $a \in \Sigma - \{\triangleright\}$  και **μετακίνησης κεφαλής** κατά μία θέση.
- Εκτελούν στοιχειώδη “ενέργεια” και τερματίζουν.
- Ορίζουμε  $M_a(\{s, h\}, \Sigma, \delta, s, \{h\})$  για κάθε  $a \in (\Sigma - \{\triangleright\}) \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}$ :
  - Για κάθε  $b \in \Sigma - \{\triangleright\}$ ,  $\delta(s, b) = (h, a)$ ,
  - και  $\delta(s, \triangleright) = (h, \rightarrow)$ .
- Συμβολισμός:  $M_{\rightarrow} \equiv R$ ,  $M_{\leftarrow} \equiv L$ ,  $M_a \equiv a$  για κάθε  $a \in \Sigma - \{\triangleright\}$ .
- Χρησιμοποιούν σαν **δομικά στοιχεία** στην κατασκευή σύνθετων Μ.Τ.

## Σύνθεση Μηχανών Turing

- Πολύπλοκες Μ.Τ. από **σύνθεση** απλούστερων Μ.Τ.  
Απλές Μ.Τ. λειτουργούν σαν καταστάσεις αυτομάτου.  
Μετάβαση από μία Μ.Τ. σε άλλη όταν **ολοκληρωθεί λειτουργία** πρώτης.
- $M_1 \xrightarrow{a} M_2$ : Λειτουργήσει όπως  $M_1$ . Όταν  $M_1$  τερματίσει: αν κεφαλή **διαβάξει  $a$** , λειτουργήσει όπως  $M_2$ , διαφορετικά τερματίσει.
- $M_1 M_2$ : Λειτουργήσει όπως  $M_1$ . Όταν  $M_1$  τερματίσει: λειτουργήσει όπως  $M_2$ .
- Μερικές απλές Μ.Τ.:
  - $R^k / L^k$ : Μετακίνηση κεφαλής  $k$  θέσεις δεξιά / αριστερά.
  - $R_{\sqcup} / L_{\sqcup}$ : Μετακίνηση κεφαλής δεξιά / αριστερά μέχρι **πρώτο κενό**.
  - $R_{\sqcup} / L_{\sqcup}$ : Μετακίνηση κεφαλής δεξιά / αριστερά μέχρι **πρώτο μη-κενό**.
- Μερικές πιο σύνθετες Μ.Τ.: ...