

Επεκτάσεις Μηχανής Turing και Μη Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Επεκτάσεις Μηχανής Turing

- Μ.Τ. είναι **πολύ ισχυρό** υπολογιστικό μοντέλο αν και φαίνονται αργές, πρωτόγονες, και αδέξιες.
- Προσπάθεια ενίσχυσης με **επιπλέον δυνατότητες**:
Π.χ. ισχυρότερη Μ.Τ. αν κεφαλή γράφει και μετακινείται στο **ίδιο** βήμα;
 - Πολλαπλές ταινίες.
 - Ταινία άπειρη και προς τις δύο κατευθύνσεις.
 - Πολλαπλές κεφαλές.
 - Ταινία δύο (γενικότερα d) διαστάσεων.
- Ευκολότερος σχεδιασμός και “μικρή” επιτάχυνση (σε κάποιες περιπτώσεις).
- **Δεν ενισχύεται** το υπολογιστικό μοντέλο:
Ίδιες κλάσεις αποφασίσιμων γλωσσών και υπολογίσιμων συναρτήσεων.
- “Ενισχυμένες” εκδόσεις προσομοιώνονται από συνηθισμένες Μ.Τ. (με πολυωνυμική επιβράδυνση).

Μηχανές Turing με Πολλαπλές Ταινίες

- Μηχανή Turing με $k \geq 1$ ταινίες $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$:
 - K καταστάσεις, Σ αλφάβητο, $s \in K$ αρχική κατάσταση, $H \subseteq K$ τελικές καταστάσεις.
 - Συνάρτηση μετάβασης $\delta : (K - H) \times \Sigma^k \mapsto K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\})^k$
Μετάβαση $\delta(q, a_1, \dots, a_k) = (p, b_1, \dots, b_k)$ επηρεάζει k ταινίες.
- **Συνολική κατάσταση** προσδιορίζει κατάσταση, και περιεχόμενα και θέση κεφαλής σε κάθε ταινία: $(q, (w_1 a_1 u_1, \dots, w_k a_k u_k))$
- Παρόμοια \vdash_M (παράγει σε ένα βήμα), \vdash_M^* (παράγει σε κάποια βήματα), αποδοχή, απόρριψη, υπολογισμός.
- Αρχική κατάσταση με είσοδο $w : (s, (\triangleright \sqcup w, \triangleright \sqcup, \dots, \triangleright \sqcup))$
Είσοδος σε **πρώτη** ταινία. Υπόλοιπες ταινίες **κενές**.
- Έξοδος u γράφεται σε **πρώτη** ταινία $\triangleright \sqcup u$.
Περιεχόμενα υπόλοιπων ταινιών **αγνοούνται**.
- Πολλαπλές ταινίες διευκολύνουν σχεδιασμό και επιταχύνουν υπολογισμό.

Προσομοίωση με Μία Ταινία

- \forall Μ.Τ. με **πολλαπλές** ταινίες, υπάρχει ισοδύναμη Μ.Τ. με **μία** ταινία.
Οτιδήποτε υπολογίζεται, αποφασίζεται, ή ημαποφασίζεται από μια Μ.Τ. με **πολλαπλές** ταινίες, υπολογίζεται, αποφασίζεται, ή ημαποφασίζεται και από μια Μ.Τ. με **μία** ταινία.
- Δεδομένης Μ.Τ. M με $k > 1$ ταινίες, ορίζουμε Μ.Τ. S με **μία** ταινία που **προσομοιώνει** λειτουργία M για **κάθε** είσοδο.
- Περιεχόμενα k ταινιών της M γράφονται στην ταινία της S :
 $\triangleright \#$ Περιεχόμενα ταινίας 1 $\#$ Περιεχόμενα ταινίας 2 $\# \dots \#$ Περιεχόμενα ταινίας $k \#$
Ειδικά σύμβολα για θέσεις κεφαλών (π.χ. \dot{a} αντί a).
- S διαβάζει σύμβολα κεφαλών σε ένα πέραςμα της ταινίας.
“Αποθηκεύει” ότι διάβασε **σε καταστάσεις**.
- S ενημερώνει τρέχουσα **κατάσταση**.
Σε 2ο πέραςμα, S γράφει σε **ταινίες** και μετακινεί κεφαλές.
Αν ταινία j “επεκτείνεται”, ταινίες $j + 1, \dots, k$ **μετακινούνται** δεξιά.

Μη Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- **Μη Ντετερμινιστική** M.T. $N = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$ με **μία** ταινία:
 - K καταστάσεις, Σ αλφάβητο, $s \in K$ αρχική κατάσταση, $H \subseteq K$ τελικές καταστάσεις.
 - **Σχέση** μετάβασης $\Delta \subseteq ((K - H) \times \Sigma) \times (K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \rightarrow\}))$
- Συνολική κατάσταση $(q, w \underline{a} u)$ και σχέσεις \vdash_M και \vdash_M^* ορίζονται παρόμοια με ντετερμινιστικές M.T.
- Παράγει σε ένα βήμα \vdash_M **όχι μονοσήμαντη**: **πολλές** συνολικές καταστάσεις μπορούν να παραχθούν σε ένα βήμα!
- **Υπολογισμός** μη-ντετ. M.T. N αναπαρίσταται σαν **δέντρο**. Κλάδοι αναπαριστούν διαφορετικές **εκδοχές** υπολογισμού της N .

Υπολογισμοί με Μη Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- Μη-ντετ. M.T. $N = (K, \Sigma, \Delta, s, H)$ και είσοδος w .
- $N(w)$ **τερματίζει** αν $(s, \triangleright \underline{a} w) \vdash_M^* (h, \text{οτδπ})$, δηλ. τουλ. ένας κλάδος υπολογισμού της $N(w)$ τερματίζει.
- N **ημιαποφασίζει** $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν $\forall w \in \Sigma_0^*, w \in L$ ανν $N(w)$ τερματίζει.
- N **δέχεται** w αν $(s, \triangleright \underline{a} w) \vdash_M^* (y, \text{οτδπ})$, δηλ. τουλ. ένας κλάδος υπολογισμού της $N(w)$ τερματίζει σε αποδοχή.
- N **αποφασίζει** γλώσσα $L \subseteq \Sigma_0^*$ αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$,
 - **όλοι** οι κλάδοι υπολογισμού της $N(w)$ **τερματίζουν**, και
 - $w \in L$ ανν N δέχεται w .
- N **υπολογίζει** συνάρτηση $f : \Sigma_0^* \mapsto \Sigma_0^*$ αν για κάθε $w \in \Sigma_0^*$, **όλοι** οι κλάδοι υπολογισμού της $N(w)$ **τερματίζουν** με αποτέλεσμα $f(w)$.
- **Αποδοχή** συμβ/ράς γίνεται με **έναν κλάδο** σε κατάσταση αποδοχής. **Υπολογισμός** συνάρτησης απαιτεί **όλοι οι κλάδοι** στο **ίδιο** αποτέλεσμα.
- Γρήγορη και εύκολη επίλυση **δύσκολων προβλημάτων** με μη-ντετ. M.T.: Π.χ. παραγοντοποίηση, κύκλος Hamilton, TSP, ...

Προσομοίωση από Ντετερμινιστικές Μηχανές Turing

- \forall **μη-ντετ.** M.T., υπάρχει ισοδύναμη **ντετ.** M.T.
Οτιδήποτε υπολογίζεται, αποφασίζεται, ή ημιαποφασίζεται από μια **μη-ντετ.** M.T., υπολογίζεται, αποφασίζεται, ή ημιαποφασίζεται και από μια **ντετ.** M.T..
- Ορίζουμε **ντετ.** M.T. M που **προσομοιώνει** **μη-ντετ.** M.T. N .
- M χρησιμοποιεί **BFS στο δέντρο** υπολογισμού της $N(w)$ (γιατί όχι DFS;).
- Έστω d **βαθμός μη-ντετερμινισμού**: μέγιστο πλήθος συνολικών καταστάσεων που παράγονται από κάποια συνολική κατάσταση.
- Κάθε d -αδικός **αριθμός** μήκους k προσδιορίζει \leq μια **ακολουθία** $\leq k$ βημάτων στο δέντρο υπολογισμού της $N(x)$.
 i -οστό **ψηφίο καθορίζει επιλογή** σε αντίστοιχο κόμβο.
- M γράφει d -αδικούς αριθμούς μήκους $1, 2, \dots$ και **προσομοιώνει** αντίστοιχους (ντετερμινιστικούς) υπολογισμούς **μέχρι**
 - είτε κάποιος υπολογισμός τερματίζει σε **αποδοχή** (M αποδέχεται),
 - είτε όλοι υπολ. μήκους $\leq k$ τερματίζουν σε **απόρριψη** (M απορρίπτει).
- Αν $t(|w|)$ **ύψος** δέντρου, **χρόνος** προσομοίωσης $O(d^{t|w|})$.