Αυτόματα Στοίβας

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

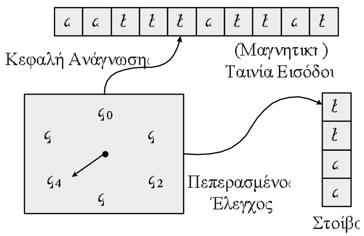
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Αναγνώριση ΓχΣ

- Χρειάζεται ισχυρότερο υπολ. μοντέλο από ΠΑ για αναγνώριση γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα.
  - ΠΑ αναγνωρίζουν γλώσσα ανν είναι κανονική.
  - Υπάρχουν ΓχΣ που δεν είναι κανονικές.
- Αναγνώριση παλίνδρομων άρτιου μήκους (ww^R) ;
  - Αποθήκευση του 1ου μισού αντεστραμένου.
  - Ανάγνωση 2ου μισού και σύγκριση με αποθηκευμένο μισό.
  - Μνήμη εξαρτάται όχι μόνο από γλώσσα αλλά και από συμβ/ρά εισόδου.
- Κανόνες μορφής $A \rightarrow aB$ προσομοιώνονται με ΠΑ.
- Προσομοίωση κανόνων $A \rightarrow aBb$;

Αυτόματα Στοίβας (pushdown automata)

- **Μη-ντετερμινιστικά** ΠΑ με απεριόριστη **μνήμη** σε μορφή **στοίβας**.
  - Είσοδος σειριακά από (μαγνητική) ταινία μέσω κεφαλής ανάγνωσης.
  - Νέο σύμβολο εισόδου προκαλεί αλλαγή κατάστασης και αλλαγή περιεχομένων στοίβας.



Αυτόματα Στοίβας

- Ένα **μη ντετερμινιστικό** αυτόματο στοίβας είναι μια εξάδα $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ όπου:
  - K : πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων.
  - Σ : αλφάβητο εισόδου.
  - Γ : αλφάβητο στοίβας.
  - $s \in K$ η αρχική κατάσταση.
  - $F \subseteq K$ το σύνολο των τελικών καταστάσεων.
  - $\Delta : (K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$ η **σχέση** μετάβασης.
  - $((p, \sigma, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$: όταν Μ στην κατάσταση p, κορυφή στοίβας β, και διαβάζει σ μπορεί να μεταβεί στην κατάσταση q αντικαθιστώντας το β με το γ.
    - $\beta = \varepsilon$: **push**. $\gamma = \varepsilon$: **pop**.

Υπολογισμός ΑΣ

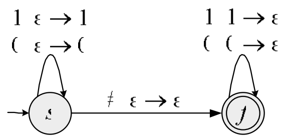
- *M*(*K*, Σ, Γ, *Δ*, *s*, *F*) «δέχεται» συμβ/ρά *w* αν ξεκινώντας από αρχική *s* με **κενή** στοίβα, *M(w)* **μπορεί να καταλήξει** σε κάποια τελική κατάσταση του *F* με **κενή** στοίβα.
- Συνολική κατάσταση $(q, w, \alpha) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$
  - *q* τρέχουσα κατάσταση.
  - *w* είσοδος που δεν έχει επεξεργασθεί ακόμη.
  - α περιεχόμενα στοίβας (LIFO – από πάνω προς τα κάτω)
- Παράγει σε ένα βήμα $\vdash_M \subseteq (K \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (K \times \Sigma^* \times \Gamma^*)$
  - $(q, w, \alpha) \vdash_M (q', w', \beta)$ αν και μόνο αν
    - $w = \sigma w'$ για κάποιο $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
    - $\alpha = \zeta u, \beta = \eta u$ για κάποιο $u \in \Gamma^*$
    - και $((q, \sigma, \zeta), (q', \eta)) \in \Delta$

Υπολογισμός ΑΣ

- Παράγει σε κάποιο αριθμό βημάτων
  $$\vdash_M^* \subseteq (K \times \Sigma^* \times \Gamma^*) \times (K \times \Sigma^* \times \Gamma^*)$$
  - $(q, w, \alpha) \vdash_M^* (q', w', \beta)$ ανν $(q, w, \alpha) \vdash_M \cdots \vdash_M (q', w', \beta)$ μετά από κάποιο αριθμό βημάτων.
- ΑΣ *M* δέχεται συμβ/ρά *w* ή *w* είναι αποδεκτό από *M* όταν
  - για κάποιο $q \in F, (s, w, \varepsilon) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$
    $$L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ είναι αποδεκτό από } M\}$$
- Πεπερασμένα αυτόματα είναι ειδική περίπτωση ΑΣ.
  - ΠΑ είναι ΑΣ που δεν χρησιμοποιεί στοίβα (δηλ. Γ = ∅).
  - Κανονικές γλώσσες είναι χωρίς συμφραζόμενα.

Παράδειγμα

- ΑΣ που δέχεται $L = \{w\#w^R : w \in \{0,1\}^*\}$

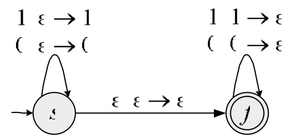


$K = \{s, f\}$,
$\Sigma = \{0, 1, \#\}$,
$\Gamma = \{0, 1\}$,
$s = s$,
$F = \{f\}$

Σχέση Δ
$((s,1,\varepsilon),(s,1))$
$((s,0,\varepsilon),(s,0))$
$((s,\#,\varepsilon),(f,\varepsilon))$
$((f,1,1),(f,\varepsilon))$
$((f,0,0),(f,\varepsilon))$

Παράδειγμα

- ΑΣ που δέχεται $L = \{ww^R : w \in \{0,1\}^*\}$

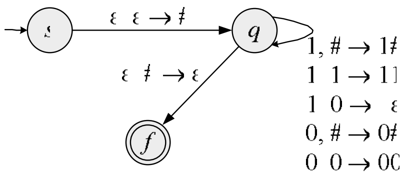


$K = \{s, f\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$,
$\Gamma = \{0, 1\}$,
$s = s$,
$F = \{f\}$

Σχέση Δ
$((s,1,\varepsilon),(s,1))$
$((s,0,\varepsilon),(s,0))$
$((s,\varepsilon,\varepsilon),(f,\varepsilon))$
$((f,1,1),(f,\varepsilon))$
$((f,0,0),(f,\varepsilon))$

Παράδειγμα

- ΑΣ που δέχεται $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ έχει ίσο αριθμό 1 και 0}\}$



Σχέση Δ
$((s,\varepsilon,\varepsilon),(q,\#))$
$((q,1,\#),(q,1\#))$
$((q,1,1),(q,11))$
$((q,1,0),(q,\varepsilon))$
$((q,0,\#),(q,0\#))$
$((q,0,0),(q,00))$
$((q,0,1),(q,\varepsilon))$
$((q,\varepsilon,\#),(f,\varepsilon))$

Γλώσσες χωρίς Συμφραζόμενα και Αυτόματα Στοίβας

- Μια γλώσσα είναι χωρίς συμφραζόμενα **ανν** αναγνωρίζεται από αυτόματο στοίβας.
- Αν μια γλώσσα αναγνωρίζεται από αυτόματο στοίβας, είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
  - Χωρίς απόδειξη.
- Αν μια γλώσσα είναι χωρίς συμφραζόμενα, αναγνωρίζεται από αυτόματο στοίβας.
  - Για γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G(V, Σ, R, S) κατασκευάζουμε αυτόματο στοίβας M(K, Σ, Γ, Δ, s, F) τέτοιο ώστε **L(G) = L(M)**.

ΓχΣ → ΑΣ

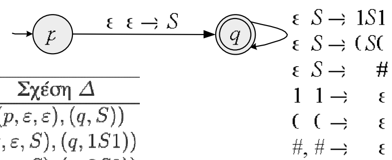
- G(V, Σ, R, S) → M(K, Σ, Γ, Δ, s, F) : L(G) = L(M).
  - M({p, q}, Σ, V, ..., p, {q})
  - Σχέση μετάβασης Δ:

$$((p,\varepsilon,\varepsilon),(q,S)) \in \Delta\,,\ \text{αρχικό σύμβολο στη στοίβα}$$
$$((q,\varepsilon,A),(q,u)) \in \Delta\,,\ \text{κανόνας } A \to u,\, u \in V^*$$
$$((q,\sigma,\sigma),(q,\varepsilon)) \in \Delta\,,\ \sigma \in \Sigma$$

  - Υπολογισμός M(w) «μιμείται» αριστερότερη παραγωγή του w από γραμματική G.
  - Απόδειξη ότι **L(G) = L(M)** με επαγωγή.

Παράδειγμα

- Γραμματική $G(\{0,1,\#,S\},\{0,1,\#\},\{S \to 1S1 \mid 0S0 \mid \#\},S)$ για γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα $L = \{w\#w^R : w \in \{0,1\}^*\}$



$K = \{p,q\}\,,$
$\Sigma = \{0,1,\#\}\,,$
$\Gamma = \{0,1,\#,S\}\,,$
$s = p\,,$
$F = \{q\}$

Σχέση Δ
$((p,\varepsilon,\varepsilon),(q,S))$
$((q,\varepsilon,S),(q,1S1))$
$((q,\varepsilon,S),(q,0S0))$
$((q,\varepsilon,S),(q,\#))$
$((q,1,1),(q,\varepsilon))$
$((q,0,0),(q,\varepsilon))$
$((q,\#,\#),(q,\varepsilon))$

Ντετερμινιστικά Αυτόματα Στοίβας

- … ορίζονται αντίστοιχα με μη ντετερμινιστικά ΑΣ.
  - Αντί για **σχέση** μετάβασης, έχουμε **συνάρτηση**.
- Μη ντετερμινιστικά ΑΣ ισχυρότερα από ντετερμινιστικά!
  - Υπάρχουν ΓχΣ που **δεν** αναγνωρίζονται από **Ντετ. ΑΣ**.
  - Ντετερμινιστικές ΓχΣ ανν αναγνωρίζονται από Ντετ. ΑΣ.
  - Ένδειξη ότι κλάση ΓχΣ **δεν** είναι κλειστή ως προς συμπλήρωμα και τομή.
- Υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού που αποφασίζει αν μια συμβ/ρα παράγεται από γραμματική χωρίς συμφραζόμενα.

Κλειστότητα

- **Τομή** γλώσσας χωρίς συμφραζόμενα με κανονική γλώσσα είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
  - Αυτ. Στοίβας $M_1(K_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \Delta_1, s_1, F_1)$: $L(M_1) = L_1$ (ΓχΣ).
  - Ντετ. Αυτ. $M_2(K_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2, F_2)$: $L(M_2) = L_2$ (ΚΣ).
  - Τομή $L_1 \cap L_2$ (παρόμοια με τομή κανονικών γλωσσών):
    - Αυτόματο στοίβας M που προσομοιώνει M_1 και M_2 ταυτόχρονα και αποδέχεται **ανν** αποδέχονται αμφότερα.
    - Αυτ. Στοίβας $M(K_1 \times K_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Gamma_1, \ldots, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$
    - Σχέση μετάβασης Δ:

$$(((q_1, q_2), \sigma, \alpha), ((p_1, \delta(q_2, \sigma)), \beta)) \in \Delta\,,\ \forall ((q_1, \sigma, \alpha), (p_1, \beta)) \in \Delta_1\,,\ \forall q_2 \in K_2$$

$$(((q_1, q_2), \varepsilon, \alpha), ((p_1, q_2), \beta)) \in \Delta\,,\ \forall ((q_1, \varepsilon, \alpha), (p_1, \beta)) \in \Delta_1\,,\ \forall q_2 \in K_2$$