Μη Ντετερμινιστικά Αυτόματα

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων

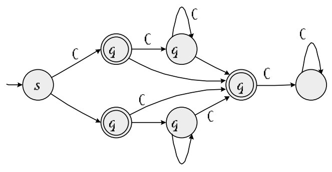
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

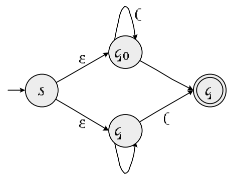
Μη Ντετερμινισμός (μη αιτιοκρατία)

- **Ντετερμινισμός**: επόμενη κατάσταση **καθορίζεται** από τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
  - **Συνάρτηση** μετάβασης δ.
- **Μη Ντετερμινισμός**: αλλαγή κατάστασης **προσδιορίζεται μερικά** από τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου.
  - Τρέχουσα κατάσταση και σύμβολο εισόδου: υπάρχουν καμία ή περισσότερες επόμενες καταστάσεις.
  - **Σχέση** (και **όχι συνάρτηση**) μετάβασης Δ.
  - Συμβ/ρά εισόδου αποδεκτή αν υπάρχει ακολουθία που οδηγεί σε τελική κατάσταση.
  - Μηχανή μαντεύει «σωστή» ακολουθία.
  - Όλες οι εναλλακτικές εκτελούνται παράλληλα.

Παράδειγμα

- Ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει $0^*1 \cup 1^*0$





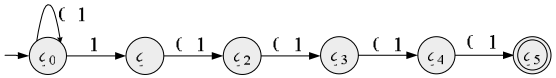
- Μη ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει $0^*1 \cup 1^*0$
  - Αποδέχεται αν υπάρχει τρόπος μετάβασης από $s \to q$
    - Αν υπάρχει, τον «μαντεύει» (δεν κάνει ποτέ λάθος)
    - Εκτελεί όλες τις μεταβάσεις παράλληλα.
  - Υπολογισμός για 0000001, 111111110, 00001000, 1111.

Μη Ντετερμινισμός

- Ντετερμινιστικός υπολογισμός: **μονοπάτι.**
  - Αποδοχή αν καταλήγει σε τελική κατάσταση.
- Μη ντετερμινιστικός υπολογισμός: **δέντρο.**
  - Αποδοχή αν **υπάρχει** κλάδος που οδηγεί σε τελική κατάστ.
- Ντετερμινιστικές μηχανές αποτελούν ειδική περίπτωση μη ντετερμινιστικών.
- **Δεν** πρόκειται για ρεαλιστικό μοντέλο υπολογισμού.
  - Διευκολύνουν σχεδιασμό και έλεγχο λειτουργίας.
  - Λειτουργία πιο κοντά στην «ανθρώπινη σκέψη». Πιο «εκφραστικό» μοντέλο υπολογισμού.
  - Ντετερμινιστική προσομοίωση: λειτουργική ισοδυναμία. «Είναι αποτελεσματική;» αποτελεί την ουσία του P vs NP.

Παράδειγμα

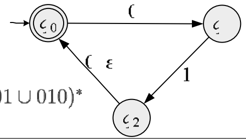
- Ντετερμινιστικό αυτόματο που αναγνωρίζει
  $L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ έχει } 1 \text{ στην 5η θέση από δεξιά}\}$
  - Ο **ελάχιστος** #καταστάσεων είναι **32.**
- Μη ντετερμινιστικό αυτόματο;



  - Υπολογισμός για 000, 11101111, 11111, 00010000.
  - Παράδειγμα δέντρου υπολογισμού.

Ορισμός

- Ένα **μη ντετερμινιστικό** πεπερασμένο αυτόματο είναι μια πεντάδα $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ όπου:
  - *K* ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων.
  - *Σ* ένα αλφάβητο (εισόδου).
  - *s* ∈ *K* η αρχική κατάσταση.
  - *F* ⊆ *K* το σύνολο των τελικών καταστάσεων.
  - $\Delta : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times K$ η **σχέση** μετάβασης.



$(01 \cup 010)^*$

$K = \{q_0, q_1, q_2\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$,
$s = q_0$,
$F = \{q_0\}$

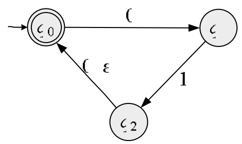
Σχέση Δ
$(q_0, 0, q_1)$
$(q_1, 1, q_2)$
$(q_2, 1, q_0)$
(q_2, ε, q_0)

Υπολογισμός ΜΠΑ

- *M*(*K*, *Σ*, *Δ*, *s*, *F*) «δέχεται» συμβ/ρά *w* αν ξεκινώντας από αρχική κατάσταση *s*, αφού επεξεργαστεί *w*, το *M* **μπορεί να καταλήξει** σε κάποια τελική κατάσταση του *F*.
- Συνολική κατάσταση (configuration) $(q, w) \in K \times \Sigma^*$
  - *q* τρέχουσα κατάσταση (αλλά μπορεί σε **πολλές**!).
  - *w* είσοδος που δεν έχει επεξεργασθεί ακόμη.
- **Σχέση** παράγει σε ένα βήμα $\vdash_M \subseteq K \times \Sigma^* \times K \times \Sigma^*$
  - $(q, w) \vdash_M (q', w')$ αν και μόνο αν
    - $w = \sigma w'$ για κάποιο $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
    - $(q, \sigma, q') \in \Delta$

Υπολογισμός ΜΠΑ

- **Σχέση** παράγει σε κάποιο αριθμό βημάτων
  $\vdash_M^* \subseteq K \times \Sigma^* \times K \times \Sigma^*$
  - $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ αν και μόνο αν υπάρχουν $n \geq 0$, $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \in K$ και $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ τέτοια ώστε:
    - $w = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w'$ και
    - $(q, \sigma_1, q_1), (q_1, \sigma_2, q_2), \ldots, (q_{n-1}, \sigma_n, q') \in \Delta$
      $(q, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M (q_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n w') \vdash_M \cdots \vdash_M (q', w')$

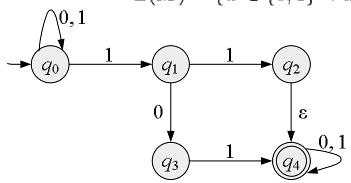


$(q_0, 01010) \vdash_M (q_1, 1010)$
$(q_1, 1010) \vdash_M (q_2, 010)$
$(q_2, 010) \vdash_M (q_0, 010)$ / $(q_0, 01010) \vdash_M^* (q_0, 010)$
$(q_0, 010) \vdash_M (q_1, 10)$ / $(q_0, 01010) \vdash_M^* (q_1, 10)$
$(q_1, 10) \vdash_M (q_2, 0)$
$(q_2, 0) \vdash_M (q_0, \varepsilon)$

Υπολογισμός ΝΠΑ

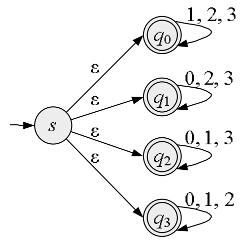
- ΝΠΑ *M* δέχεται συμβ/ρά *w* ή *w* είναι αποδεκτό από *M* όταν
  - για κάποιο $q \in F, (s, w) \vdash_M^* (q, \varepsilon)$
- Γλώσσα *M* : $L(M) = \{w \in \Sigma^* : w \text{ είναι αποδεκτό από } M\}$
- Γλώσσα εικονιζόμενου ΠΑ;

$$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ περιέχει } 11 \text{ ή } 101\}$$



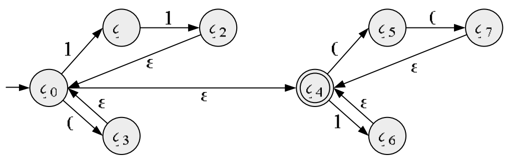
Παράδειγμα

- ΝΠΑ που δέχεται
  $L = \{w \in \{0,1,2,3\}^* : \exists a \in \Sigma \text{ που δεν εμφανίζεται στο } w\}$



Παράδειγμα

- ΝΠΑ που δέχεται $(11 \cup 0)^*(00 \cup 1)^*$



Ισοδυναμία ΠΑ και ΜΠΑ

- Αυτόματα M_1 και M_2 **ισοδύναμα**: $L(M_1) = L(M_2)$.
  - Αναγνωρίζουν ίδια γλώσσα με διαφορετική μέθοδο.
- Ντετερμινιστικά ΠΑ είναι ειδική περίπτωση μη ντετερμινιστικών ΠΑ.
  - Για κάθε ΠΑ Μ, υπάρχει ισοδύναμο ΜΠΑ (το ίδιο το Μ).
- Για κάθε **μη** ντετερμινιστικό αυτόματο M(K, Σ, Δ, s, F), υπάρχει ισοδύναμο ντετερμινιστικό M'(K', Σ, δ', s', F').
  - ΜΠΑ βρίσκεται (παράλληλα) σε σύνολο καταστάσεων:
    - Καταστάσεις Μ' είναι υποσύνολα Κ, $\mathbf{K' = 2^K}$
  - Επόμενη κατάσταση Μ': **σύνολο καταστάσεων** όπου καταλήγει Μ από **τρέχον σύνολο καταστάσεων** με συγκεκριμένο **σύμβολο εισόδου**.

Ισοδυναμία ΠΑ και ΜΠΑ

- Για μεταβάσεις με ε (κενή συμβολοσειρά):
  - Σύνολο καταστάσεων προσιτό από q χωρίς είσοδο.

$$E(q) = \{p \in K : (q, \varepsilon) \vdash_M^* (p, \varepsilon)\}$$

- Περιγραφή ντετερμινιστικού M':

$K' = 2^K$ Όλα τα υποσύνολα του K

$s' = E(s)$ Σύνολο με κατ. προσπελάσιμες από s με ε

$F' = \{Q \subseteq K : Q \cap F \neq \emptyset\}$ Σύνολα με τελική κατ. του M

$\delta'(Q, \sigma) = \bigcup\{E(p) : p \in K$ και $(q, \sigma, p) \in \Delta$ για $q \in Q\}$ $\forall Q \subseteq K, \forall \sigma \in \Sigma$

- Με επαγωγή σε $|w|$: $\forall w \in \Sigma^*, \forall p, q \in K, \exists P \subseteq K, p \in P$:

$$(q, w) \vdash_M^* (p, \varepsilon) \Leftrightarrow ((E(q), w) \vdash_{M'}^* (P, \varepsilon)$$

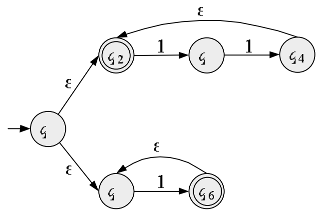
  - … δηλαδή ότι M' προσομοιώνει M.

Παράδειγμα

- Κατασκευαστική απόδειξη (εκθετικός χρόνος λόγω 2^K).

$$\delta'(Q, \sigma) = \bigcup\{E(p) : p \in K \text{ και } (q, \sigma, p) \in \Delta \text{ για } q \in Q\}$$

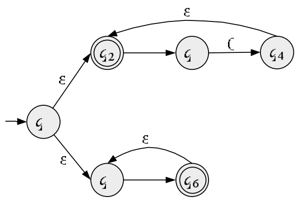
$$\delta'(Q, \sigma) = \{q' \in K : (q, \sigma) \vdash_M^* (q', \varepsilon) \text{ για κάποιο } q \in Q\}$$



$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_5\}$
$E(q_2) = \{q_2\}$
$E(q_3) = \{q_3\}$
$E(q_4) = \{q_2, q_4\}$
$E(q_5) = \{q_5\}$
$E(q_6) = \{q_5, q_6\}$
$s' = \{q_1, q_2, q_5\}$

Παράδειγμα

$\delta'(Q, \sigma) = \bigcup\{E(p) : p \in K$ και $(q, \sigma, p) \in \Delta$ για $q \in Q\}$



q	σ	$\delta(q, \sigma)$
$\{q_1, q_2, q_5\}$	0	$\emptyset$
$\{q_1, q_2, q_5\}$	1	$\{q_3, q_5, q_6\}$
$\{q_3, q_5, q_6\}$	0	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_3, q_5, q_6\}$	1	$\{q_5, q_6\}$
$\{q_2, q_4\}$	0	$\emptyset$
$\{q_2, q_4\}$	1	$\{q_3\}$
$\{q_5, q_6\}$	0	$\emptyset$
$\{q_5, q_6\}$	1	$\{q_5, q_6\}$
$\{q_3\}$	0	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_3\}$	1	$\emptyset$
$\emptyset$	0	$\emptyset$
$\emptyset$	1	$\emptyset$

Μία Άσκηση

- Έστω L = L(M) γλώσσα που γίνεται δεκτή από (Ν)ΠΑ. Ν.δ.ο. οι παρακάτω γλώσσες γίνονται δεκτές από (Ν)ΠΑ:
  - Pref(L) = { w ∈ Σ^* : x = wy για κάποια x ∈ L, y ∈ Σ^*}
  - Suf(L) = { w ∈ Σ^* : x = yw για κάποια x ∈ L, y ∈ Σ^*}
  - Max(L) = { w ∈ Σ^* : αν x ≠ ε συνεπάγεται wx ∉ L }
  - L^R = { w^R : w ∈ L }