Θεωρία Γραφημάτων: Επικαλύπτοντα Δέντρα

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: `fotakis@aegean.gr`

1 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες

Κάθε υπογράφημα που είναι δέντρο και περιλαμβάνει (καλύπτει) όλες τις κορυφές ενός γραφήματος ονομάζεται *επικαλύπτον δέντρο* (spanning tree) του γραφήματος. Άλλες ελληνικές αποδόσεις του ίδιου όρου είναι: γενετικό δέντρο, γεννητορικό δέντρο, παράγον δέντρο, διανύον δέντρο, δέντρο-κάλυμα, και συνδετικό δέντρο.

Θεώρημα 1. *Ένα γράφημα είναι συνεκτικό αν και μόνο αν έχει ένα επικαλύπτον δέντρο.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει ένα υπογράφημα που καλύπτει όλες τις κορυφές του γραφήματος και είναι δέντρο (άρα συνεκτικό), τότε το γράφημα δεν μπορεί παρά να είναι συνεκτικό (αφού η προσθήκη των ακμών που λείπουν απλώς "ενισχύει" τη συνεκτικότητα).

Αν το γράφημα είναι συνεκτικό, θεωρούμε ένα υπογράφημα T που αρχικά συμπίπτει με το γράφημα. Επομένως, το T καλύπτει όλες τις κορυφές του γραφήματος. Ενόσω το T έχει κύκλους, αφαιρούμε μία ακμή που βρίσκεται σε κύκλο (δηλαδή μια ακμή που δεν είναι γέφυρα). Το T παραμένει συνεκτικό αφού η αφαίρεση μιας ακμής που βρίσκεται σε κύκλο δεν αίρει τη συνεκτικότητα. Αυτή η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν το T γίνει άκυκλο. Σε αυτή τη φάση, το T παραμένει συνεκτικό (από την κατασκευή) και συνεχίζει να καλύπτει όλες τις κορυφές του αρχικού γραφήματος (αφού ποτέ δεν αφαιρέσαμε κάποια κορυφή). Συνεπώς, το υπογράφημα που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία είναι ένα επικαλύπτον δέντρο του αρχικού γραφήματος. □

Κάθε επικαλύπτον δέντρο ενός γραφήματος με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές. Με άλλα λόγια, όλα τα επικαλύπτοντα δέντρα ενός γραφήματος έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 δίνει έναν τρόπο να υπολογίσουμε ένα επικαλύπτον δέντρο ενός συνεκτικού γραφήματος. Ένας άλλος τρόπος είναι να θεωρήσουμε τις ακμές του G μία-προς-μία σε μια (οποιαδήποτε) συγκεκριμένη σειρά και να προσθέτουμε στο δέντρο κάθε νέα ακμή που δεν σχηματίζει κύκλο με τις υπάρχουσες. Άλλοι τρόποι είναι το Ψάξιμο Πρώτα σε Πλάτος (ΨΠΠ - Breadth First Search) και το Ψάξιμο Πρώτα σε Βάθος (ΨΠΒ - Depth First Search).

Υπόδειξη για ΨΠΠ και ΨΠΒ. Πριν εφαρμόσετε Ψάξιμο Πρώτα σε Πλάτος ή Ψάξιμο Πρώτα σε Βάθος, πρέπει να αναφέρετε ποια είναι η αρχική κορυφή - ρίζα και με ποια σειρά εξετάζετε τις κορυφές. Δεν έχει σημασία ποια είναι η συγκεκριμένη σειρά των κορυφών, όμως πρέπει να ακολουθείτε την ίδια σειρά σε κάθε βήμα του αλγορίθμου. □

2 Θεμελιώδεις Κύκλοι και Σύνολα Τομής

Έστω συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και m ακμές, και έστω $T(V, E_T)$ ένα επικαλύπτον δέντρο του G.

Παρατηρούμε ότι για κάθε επικαλύπτον δέντρο T, κάθε κύκλος του G πρέπει να περιέχει μια ακμή που δεν ανήκει στο T (αλλιώς το T θα περιείχε κύκλο). Η προσθήκη κάθε ακμής που δεν ανήκει στο T (δηλαδή κάθε ακμής στο σύνολο $E \setminus E_T$) σχηματίζει ακριβώς έναν (απλό) κύκλο. Κάθε τέτοιος κύκλος ονομάζεται *θεμελιώδης κύκλος* του G ως προς το επικαλύπτον δέντρο T. Αφού το σύνολο $E \setminus E_T$ περιέχει $m - n + 1$ ακμές (αυτές οι ακμές λέγονται και *χορδές* (chords) του T), υπάρχουν $m - n + 1$ διαφορετικοί θεμελιώδεις κύκλοι του G ως προς κάθε επικαλύπτον δέντρο του.

Ορισμός 1. *Ένα σύνολο ακμών των οποίων η αφαίρεση κάνει το G μη-συνεκτικό ονομάζεται* σύνολο τομής *(cut set).*

Παρατηρούμε ότι για κάθε επικαλύπτον δέντρο T, κάθε σύνολο τομής του G πρέπει να περιέχει μια ακμή που δεν ανήκει στο T (αλλιώς το T δεν θα ήταν συνεκτικό). Η αφαίρεση κάθε ακμής του T δημιουργεί δύο συνεκτικές συνιστώσες. Έστω $e \in E_T$ μια ακμή του T, και έστω V_1 και V_2 οι κορυφές των δύο συνεκτικών συνιστωσών του $T - e$ (δηλ. οι συνιστώσες που προκύπτουν από την αφαίρεση της ακμής e). Έστω $\delta(V_1, V_2)$ το σύνολο των ακμών που έχουν το ένα άκρο τους στο V_1 και το άλλο στο V_2. Προφανώς, $e \in \delta(V_1, V_2)$ και το $\delta(V_1, V_2)$ αποτελεί ένα ελαχιστοτικό σύνολο τομής για το γράφημα G. Κάθε σύνολο τομής που προκύπτει με αυτό τον τρόπο ονομάζεται *θεμελιώδες σύνολο τομής* του G ως προς το επικαλύπτον δέντρο T. Αφού το σύνολο E_T περιέχει $n - 1$ ακμές, υπάρχουν $n - 1$ διαφορετικά θεμελιώδη σύνολα τομής του G ως προς κάθε επικαλύπτον δέντρο του.

Σε ένα γράφημα, το σύνολο όλων των κύκλων (συνόλων τομής) αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο. Η σημαντική παρατήρηση είναι ότι το σύνολο των θεμελιωδών κύκλων (συνόλων τομής) ως προς ένα οποιοδήποτε επικαλύπτον δέντρο του G αποτελεί βάση για το διανυσματικό χώρο όλων των κύκλων (αντίστοιχα συνόλων τομής). Επομένως, η διάσταση του διανυσματικού χώρου των κύκλων (συνόλων τομής) για ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και m ακμές είναι $m - n + 1$ ($n - 1$ αντίστοιχα).

Θεώρημα 2. *Κάθε κύκλος έχει άρτιο αριθμό κοινών ακμών με κάθε ελαχιστοτικό σύνολο τομής.*

Απόδειξη. Η αφαίρεση ενός ελαχιστοτικού συνόλου τομής χωρίζει τις κορυφές ενός γραφήματος σε δύο συνεκτικές συνιστώσες. Κάθε κύκλος χρησιμοποιεί ακμές του συνόλου τομής για να “επισκεφθεί” και να “αναχωρήσει” από μια συνεκτική συνιστώσα. Επιπλέον, ο αριθμός των “επισκέψεων” ενός κύκλου σε μια συνεκτική συνιστώσα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των “αναχωρήσεων”. Έστω $\varepsilon_k = \alpha_k$ ο αριθμός των “επισκέψεων” και των “αναχωρήσεων” ενός κύκλου στη μία από τις δύο συνεκτικές συνιστώσες. Ο αριθμός των κοινών ακμών του κύκλου με το αντίστοιχο ελαχιστοτικό σύνολο τομής είναι $\varepsilon_k + \alpha_k = 2\varepsilon_k$, δηλαδή άρτιος. □

Άσκηση 1. Έστω T και T' δύο επικαλύπτοντα δέντρα ενός (συνεκτικού) γραφήματος G. Για κάθε ακμή $e \in T \setminus T'$, υπάρχει ακμή $e' \in T' \setminus T$, τέτοια ώστε το $(T' + e) - e'$ είναι επικαλύπτον δέντρο του G.

Λύση. Αφού $e \in T \setminus T'$, το $T' + e$ περιέχει έναν απλό κύκλο που περιλαμβάνει την e. Έστω $e' \in T'$ μια ακμή αυτού του κύκλου που δεν ανήκει στο T. Μια τέτοια ακμή e' υπάρχει γιατί το T περιέχει την e αλλά δεν περιέχει τον κύκλο. Η αφαίρεση της e' αφαιρεί τον κύκλο αλλά δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα. Συνεπώς, το $(T' + e) - e'$ είναι επικαλύπτον δέντρο του G. □

Άσκηση 2. Έστω T και T' δύο επικαλύπτοντα δέντρα ενός (συνεκτικού) γραφήματος G. Για κάθε ακμή $e \in T \setminus T'$, υπάρχει ακμή $e' \in T' \setminus T$, τέτοια ώστε το $(T - e) + e'$ είναι επικαλύπτον δέντρο του G.

Λύση. Αφαιρούμε την e από το T και προκύπτουν δύο συνεκτικές συνιστώσες, έστω V_1 και V_2. Αφού το T' δεν περιέχει την e αλλά είναι συνεκτικό, υπάρχει μια ακμή $e' \in T'$ που συνδέει κορυφή του V_1 και με κορυφή του V_2. Η e' δεν ανήκει στο T γιατί η προσθήκη της θα σχημάτιζε κύκλο. Επομένως, η προσθήκη της e' στο $T - e$ επαναφέρει τη συνεκτικότητα και το $(T - e) + e'$ είναι επικαλύπτον δέντρο του G. □

3 Ελάχιστα Επικαλύπτοντα Δέντρα

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε συνεκτικό γράφημα $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές. Η συνάρτηση $w : E \mapsto \mathbb{R}_+^*$ δίνει το βάρος κάθε ακμής. Δεδομένου ενός γραφήματος $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές, θέλουμε να υπολογίσουμε το συνεκτικό επικαλύπτον (spanning) υπογράφημα με το ελάχιστο συνολικό βάρος. Αυτό το υπογράφημα θα είναι δέντρο, αφού είναι συνεκτικό (εξ΄ ορισμού) και άκυκλο (αν είχε κύκλους θα μπορούσαμε να μειώσουμε το βάρος του αφαιρώντας ακμές).

Το *Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο* (ΕΕΔ - Minimum Spanning Tree) ενός γραφήματος με βάρη στις ακμές είναι το επικαλύπτον δέντρο με το ελάχιστο συνολικό βάρος. Το πρόβλημα του υπολογισμού ενός τέτοιου δέντρου είναι γνωστό σαν πρόβλημα του Ελάχιστου Επικαλύπτοντος Δέντρου (ΕΕΔ) και αποτελεί ένα τυπικό παράδειγμα προβλήματος υπολογιστικής βελτιστοποίησης με πολλές πρακτικές εφαρμογές (π.χ. σχεδιασμός οδικών και τηλεπικοινωνιακών δικτύων).

Άσκηση 3. Έστω $G(v, E, w)$ ένα γράφημα με διαφορετικά βάρη στις ακμές, και έστω e^* η (μοναδική) ακμή με το ελάχιστο βάρος (αφού όλα τα βάρη είναι διαφορετικά, ισχύει ότι $\forall e \in E \setminus \{e^*\}, w(e^*) < w(e)$. Να αποδείξετε ότι κάθε ΕΕΔ του G περιέχει την e^*.

Λύση. Η απόδειξη είναι με απαγωγή σε άτοπο. Έστω T ένα ΕΕΔ του G που δεν περιέχει την e^*. Η προσθήκη της e^* στο T δημιουργεί ακριβώς ένα κύκλο. Έστω e μια οποιαδήποτε ακμή αυτού του κύκλου. Η αφαίρεσή της "σπάει" τον κύκλο δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα. Συνεπώς, το $(T + e^*) - e$ αποτελεί ένα επικαλύπτον δέντρο του G. Όμως είναι $w(e) > w(e^*)$, επειδή η e^* είναι η μοναδική ακμή ελάχιστου βάρους, και το $(T + e^*) - e$ έχει μικρότερο συνολικό βάρος από το T. Αυτό αποτελεί αντίφαση στο γεγονός ότι το T είναι ένα ΕΕΔ.

Με παρόμοιο τρόπο μπορείτε να αποδείξετε ότι η ακμή μέγιστου βάρους δεν συμπεριλαμβάνεται σε κανένα ΕΕΔ του G και ότι το ΕΕΔ του G είναι μοναδικό. □

Στη συνέχεια της ενότητας, θα διατυπώσουμε δύο αποδοτικούς αλγόριθμους για τον υπολογισμό ενός ΕΕΔ. Οι αλγόριθμοι βασίζονται σε μια σημαντική ιδιότητα του ΕΕΔ που είναι γνωστή και σαν ιδιότητα των *βέλτιστων επιμέρους λύσεων* (optimal substructures).

Έστω T ένα ΕΕΔ για το γράφημα $G(V, E, w)$ με βάρη στις ακμές, και έστω e μια οποιαδήποτε ακμή του T. Η αφαίρεση της e από το T δημιουργεί δύο συνεκτικές συνιστώσες. Έστω V_1 και V_2 τα σύνολα κορυφών των δύο συνεκτικών συνιστωσών, και έστω T_1 και T_2 τα δύο υποδέντρα του $T - e$. Τότε το T_1 είναι ένα ΕΕΔ του επαγώμενου υπογραφήματος $G(V_1)$, το T_2 είναι ένα ΕΕΔ του επαγώμενου υπογραφήματος $G(V_2)$, και η e είναι μια ελαφρύτερη ακμή του (θεμελιώδους ως προς T) συνόλου τομής $\delta(V_1, V_2)$. Για την απόδειξη, αν υποθέσετε ότι κάτι από τα παραπάνω δεν ισχύει, προκύπτει εύκολα ότι υπάρχει επικαλύπτον δέντρο του G με μικρότερο συνολικό βάρος από το T. Αυτό φυσικά είναι άτοπο.

Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει τον υπολογισμό ενός ΕΕΔ από έναν αλγόριθμο που λειτουργεί αυξητικά και ακολουθεί τη μέθοδο της απληστίας. Ο αλγόριθμος διατηρεί ένα δάσος Δ το οποίο αποτελεί υπογράφημα ενός ΕΕΔ[1]. Αρχικά, το δάσος είναι κενό. Σε κάθε βήμα προστίθεται στο δάσος Δ μία ακμή με την προσθήκη της οποίας το Δ παραμένει υπογράφημα ενός ΕΕΔ. Θα λέμε αυτές τις ακμές *ασφαλείς* για το Δ. Ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται όταν το Δ αποκτήσει $n - 1$ ακμές, οπότε αποτελεί ένα ΕΕΔ.

Μια ακμή e είναι ασφαλής για το Δ όταν (α) αν το Δ είναι δάσος, το $\Delta \cup \{e\}$ παραμένει δάσος (δηλαδή εξακολουθεί να είναι άκυκλο), και (β) αν το Δ είναι υπογράφημα ενός ΕΕΔ, τότε και το $\Delta \cup \{e\}$ είναι υπογράφημα ενός ΕΕΔ.

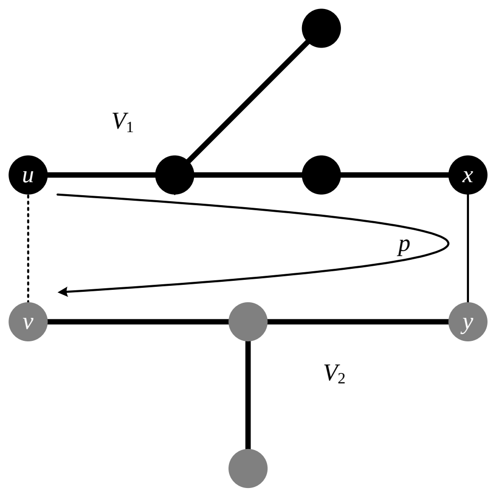
Η μια διατύπωση του παραπάνω γενικού αλγορίθμου είναι:

MST($G(V, E, w)$)
    $\Delta \leftarrow \emptyset$;
    while $|\Delta| < |V| - 1$ **do**
        Βρες μια ασφαλή ακμή e για το Δ;
        $\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e\}$;
    return(Δ);

Με βάση τον ορισμό της ασφαλούς ακμής, μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος υπολογίζει ένα ΕΕΔ. Αρχικά το γράφημα χωρίς ακμές αποτελεί υπογράφημα κάθε ΕΕΔ του G. Αν σε κάποιο βήμα το Δ αποτελεί υπογράφημα ενός ΕΕΔ (επαγωγική υπόθεση), τότε από τον ορισμό της ασφαλούς ακμής το $\Delta \cup \{e\}$ παραμένει υπογράφημα ενός ΕΕΔ. Όταν το Δ αποκτήσει $|V| - 1$ ακμές, ταυτίζεται με κάποιο ΕΕΔ.

Αυτό που απομένει είναι να δείξουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε αποδοτικά μια ασφαλή ακμή σε κάθε βήμα του αλγόριθμου. Για αυτό το σκοπό, θα χρησιμοποποιήσουμε την ιδιότητα των βέλτιστων επιμέρους λύσεων. Έστω μια διαμέριση των κορυφών του G στα σύνολα V_1 και V_2, και έστω $\delta(V_1, V_2)$ το αντίστοιχο σύνολο τομής. Κάθε ΕΕΔ πρέπει να περιέχει μια ακμή ελάχιστου βάρους από το $\delta(V_1, V_2)$. Θα αποδείξουμε ότι όλες οι ακμές ελάχιστου βάρους του συνόλου τομής $\delta(V_1, V_2)$ είναι ασφαλείς για κάθε Δ που αποτελεί υπογράφημα ενός ΕΕΔ του G και δεν "διασχίζει" την τομή (V_1, V_2) (δηλ. δεν περιέχει άλλη ακμή του συνόλου τομής $\delta(V_1, V_2)$).

[1] Υπενθυμίζεται ότι όλα τα επικαλύπτοντα δέντρα ενός γραφήματος με n κορυφές έχουν $n - 1$ ακμές. Παρατηρείστε ότι κάθε υπογράφημα ενός επικαλύπτοντος δέντρου είναι δάσος όταν έχει λιγότερες από $n - 1$ ακμές και γίνεται επικαλύπτον δέντρο όταν αποκτήσει ακριβώς $n - 1$ ακμές.



Σχήμα 1. Υπάρχει ΕΕΔ που περιέχει μια ακμή ελάχιστου βάρους του συνόλου τομής $\delta(V_1, V_2)$.

Θεώρημα 3. *Έστω $G(V, E, w)$ συνεκτικό γράφημα με βάρη στις ακμές, έστω V_1, V_2 μια διαμέριση των κορυφών του G, και έστω Δ ένα υπογράφημα ενός ΕΕΔ που δεν περιέχει καμία ακμή του συνόλου $\delta(V_1, V_2)$. Κάθε ακμή ελάχιστου βάρους του $\delta(V_1, V_2)$ αποτελεί ασφαλή ακμή για το Δ.*

Απόδειξη. Έστω T ένα ΕΕΔ του G του οποίο το Δ είναι υπογράφημα, και έστω $e = \{u, v\}$ μια ακμή ελάχιστου βάρους του συνόλου $\delta(V_1, v_2)$. Αν το $\Delta \cup \{e\}$ παραμένει υπογράφημα του T, η ακμή e είναι όντως ασφαλής για το Δ. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η e δεν ανήκει στο T και το $\Delta \cup \{e\}$ δεν αποτελεί υπογράφημα του T. Σε αυτή την περίπτωση, θα κατασκευάσουμε ένα ΕΕΔ T' του οποίου το $\Delta \cup \{e\}$ αποτελεί υπογράφημα.

Έστω p το μονοπάτι σύνδεσης των άκρων της ακμής e, δηλ. των κορυφών u και v, στο T. Το $p + e$ αποτελεί κύκλο γιατί έχουμε υποθέσει ότι η e δεν ανήκει στο T. Αφού το ένα άκρο της e ανήκει στο V_1 και το άλλο ανήκει στο V_2 (έστω $u \in V_1$ και $v \in V_2$), θα πρέπει να υπάρχει μια ακμή του p που ανήκει στο $\delta(V_1, V_2)$ (διαισθητικά, το p πρέπει να "διασχίζει" την τομή V_1, V_2). Έστω $e' = \{x, y\}$ αυτή η ακμή (βλ. Σχήμα 1).

Το $T' = (T + e) - e'$ αποτελεί ένα επικαλύπτον δέντρο του G επειδή η αφαίρεση της e' από το $T + e$ "σπάει" τον κύκλο $p + e$ χωρίς να επηρεάζει τη συνεκτικότητα. Επίσης, το Δ είναι υπογράφημα του $T - e'$ γιατί έχουμε υποθέσει ότι το Δ δεν περιέχει καμία ακμή του συνόλου $\delta(V_1, V_2)$. Συνεπώς, το $\Delta \cup \{e\}$ αποτελεί υπογράφημα του T'.

Αφού υποθέσαμε ότι η e είναι μια ακμή ελάχιστου βάρους του $\delta(V_1, V_2)$ και ότι $e' \in \delta(V_1, V_2)$, είναι το βάρος της e είναι μικρότερο ή ίσο του βάρους της e'. Συνεπώς, το συνολικό βάρος του T' δεν ξεπερνά το συνολικό βάρος του T και το T' αποτελεί ένα ΕΕΔ του G. Δείξαμε λοιπόν ότι το $\Delta \cup \{e\}$ αποτελεί υπογράφημα ενός ΕΕΔ του G και επομένως η ακμή e αποτελεί μια ασφαλή ακμή για το Δ. □

3.1 Αλγόριθμος Kruskal

Ο αλγόριθμος του Kruskal εξετάζει τις ακμές του γραφήματος μία-προς-μία σε αύξουσα σειρά βάρους και προσθέτει στο δάσος κάθε ακμή που δεν σχηματίζει κύκλο με τις ήδη υπαρχουσες.

MST-Kruskal($G(V, E, w)$)

Έστω ότι οι ακμές είναι ταξινομημένες σε αύξουσα σειρά βάρους,
δηλ. $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$.
$\Delta \leftarrow \emptyset$; $i \leftarrow 1$;
while $|\Delta| < |V| - 1$ **and** $i \leq m$ **do**
  if $\Delta \cup \{e_i\}$ δεν έχει κύκλο **then**
    $\Delta \leftarrow \Delta \cup \{e_i\}$;
  $i \leftarrow i + 1$;
return(Δ);

Η υλοποίηση του αλγόριθμου απαιτεί έναν αλγόριθμο ταξινόμησης των ακμών σε αύξουσα σειρά βάρους και μια δομή διαχείρισης ξένων συνόλων που για τον έλεγχο αν η προσθήκη μιας ακμής δημιουργεί κύκλο. Ο αλγόριθμος μπορεί να υλοποιηθεί ώστε να έχει χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης $\Theta(m \log m)$.

Για την ορθότητα του αλγόριθμου, παρατηρούμε ότι αν η προσθήκη της ακμής e_i δεν δημιουργεί κύκλο στο Δ, πρέπει να "διασχίζει" μια τομή την οποία δεν "διασχίζει" το Δ. Αφού εξετάζουμε τις ακμές σε αύξουσα σειρά βάρους, η ακμή e_i έχει το ελάχιστο βάρος από όλες τις ακμές που "διασχίζουν" την ίδια τομή. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3, κάθε ακμή που προστίθεται είναι ασφαλής για το Δ. Άρα ο αλγόριθμος υπολογίζει ένα ΕΕΔ του G.

3.2 Αλγόριθμος Prim

Ο αλγόριθμος του Prim διατηρεί ένα δέντρο που καλύπτει ένα υποσύνολο των κορυφών. Ο αλγόριθμος ξεκινάει από μια οποιαδήποτε κορυφή με ένα αρχικά κενό δέντρο. Σε κάθε επανάληψη, ο αλγόριθμος προσθέτει στο δέντρο την ελαφρύτερη ακμή που συνδέει μια κορυφή εντός με μια κορυφή εκτός του δέντρου. Ο αλγόριθμος τερματίζει έπειτα από $n - 1$ επαναλήψεις και επιστρέφει ένα ΕΕΔ του G.

Ο αλγόριθμος του Prim μπορεί να υλοποιηθεί ώστε να έχει χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης $\Theta(m + n \log n)$. Αυτός ο χρόνος είναι ασυμπτωτικά μικρότερος από το χρόνο εκτέλεσης του αλγόριθμου του Kruskal για πυκνά γραφήματα, δηλ. γραφήματα με πολλές ακμές.

Για την ορθότητα του αλγόριθμου του Prim, παρατηρούμε ότι η ακμή που προστίθεται σε κάθε επανάληψη (α) δεν δημιουργεί κύκλο γιατί συνδέει μια κορυφή εντός με μια κορυφή εκτός του δέντρου, και (β) είναι μια ακμή ελάχιστου βάρους που "διασχίζει" την τομή που δημιουργείται από τις κορυφές εντός του δέντρου και τις κορυφές εκτός του δέντρου. Από το Θεώρημα 3, η ακμή που προστίθεται είναι ασφαλής για το δέντρο και ο αλγόριθμος υπολογίζει ένα ΕΕΔ.