Γεννητριες Συναρτήσεις για Επίλυση Συνδυαστικών Προβλημάτων

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: fotakis@aegean.gr

1 Βασική Ιδέα

Οι Γεννήτριες Συναρτήσεις (ΓΣ) επιτρέπουν τη **συμβολική** αναπαράσταση όλων των ενδεχόμενων ενός "πειράματος". Όλα τα διαφορετικά ενδεχόμενα ενός "πειράματος" μπορούν να κωδικοποιηθούν σε μία συνάρτηση, τη λεγόμενη ΓΣ. Έχοντας τη ΓΣ που αντιστοιχεί σε ένα "πείραμα", μπορώ να απαντήσω σε ότι με ρωτήσουν για αυτό. Αφού σχηματίσω τη ΓΣ, χρησιμοποιώ αλγεβρικά "εργαλεία" για να λύσω συνδυαστικά προβλήματα!

Παράδειγμα: Έχω τρία διαφορετικά αντικείμενα, τα a, b, c. Γράφω 1 ($= a^0 = b^0 = c^0$) όταν δεν διαλέγω κάποιο αντικείμενο και a, b, c όταν το διαλέγω. Η

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (ab+ac+bc) + abc$$

είναι η ΓΣ που περιγράφει όλα τα διαφορετικά ενδεχόμενα του "πειράματος" κατά το οποίο διαλέγω αντικείμενα από τα a, b, c χωρίς επανάληψη. Μπορώ να διαλέξω ή να μη διαλέξω το a, να διαλέξω ή να μη διαλέξω το b, και να διαλέξω ή να μη διαλέξω το c. Χρησιμοποιώ τον κανόνα του γινομένου αφού αυτά τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα.

Θέλω να αποφύγω την εξάρτηση από τις ταυτότητες των συγκεκριμένων αντικειμένων. Για αυτό χρησιμοποιώ την ίδια μεταβλητή x για όλα τα αντικείμενα. Ο εκθέτης του x δηλώνει τον αριθμό των αντικειμένων που επιλέγω σε κάθε περίπτωση. Έτσι η ΓΣ για την επιλογή από τρία διαφορετικά αντικείμενα χωρίς επαναλήψεις είναι

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Υπάρχει λοιπόν 1 τρόπος να διαλέξω κανένα αντικείμενο (συντελεστής του x^0), 3 τρόποι να διαλέξω ένα αντικείμενο (συντελεστής του x^1), 3 τρόποι να διαλέξω δύο αντικείμενα (συντελεστής του x^2), και 1 τρόπος να διαλέξω τρία αντικείμενα (συντελεστής του x^3).

2 Συνήθεις Γεννήτριες Συναρτήσεις

Η *συνήθης Γεννήτρια Συνάρτηση* μιας ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ δίνεται από τη σειρά $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Ο συντελεστής του x^i είναι ο i-οστός όρος της ακολουθίας (δηλ. ο a_i). Οι συνήθεις ΓΣ χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του αριθμού των διαφορετικών *συνδυασμών* αντικειμένων.

Αν έχω να επιλέξω από n αντικείμενα χωρίς επανάληψη, η ΓΣ είναι

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

αφού για κάθε αντικείμενο έχω δύο ενδεχόμενα: να το επιλέξω μία φορά (συμβολίζεται με $x = x^1$) ή να το επιλέξω καμία φορά (συμβολίζεται με $1 = x^0$). Τα δύο ενδεχόμενα για κάθε αντικείμενο είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, για αυτό έχω άθροισμα $1+x$. Τα ενδεχόμενα για τα n διαφορετικά αντικείμενα είναι ανεξάρτητα, για αυτό έχω γινόμενο και καταλήγω στο $(1+x)^n$. Ο συντελεστής του x^k, που είναι $\binom{n}{k} = C(n,k)$, δίνει τους διαφορετικούς συνδυασμούς k αντικειμένων από n.

Παράδειγμα: ΓΣ για επιλογή από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις (κάθε αντικείμενο μπορεί να επιλεγεί καμία ή μία ή δύο κοκ. φορές):

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+\ldots)^n = (1-x)^{-n} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-x)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k\end{aligned}$$

Ο συντελεστής του x^k, που είναι $\binom{n+k-1}{k}$, δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να επιλέξω k από n αντικείμενα με επανάληψη[1]

Παράδειγμα: Αν θέλω να διαλέξω k από n αντικείμενα με επανάληψη ώστε κάθε αντικείμενο να επιλεγεί τουλάχιστον μία φορά ($k \geq n$), η ΓΣ είναι:

$$\begin{aligned}(x+x^2+\ldots)^n = x^n(1-x)^{-n} &= x^n \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i\right] \\ &= x^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{n+k-n-1}{k-n} x^k \\ &= x^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k\end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει αναλύοντας το $(1-x)^{-n}$ όπως παραπάνω, και η τρίτη ισότητα πολλαπλασιάζοντας με x^n και αλλάζοντας τη μεταβλητή i με $k = n+i$ (δηλαδή αντικαθιστώ το i με $k-n$). Ο συντελεστής του x^k, που είναι $\binom{k-1}{n-1}$, δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να επιλέξω k από n αντικείμενα με επανάληψη όταν κάθε αντικείμενο επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά. Αυτό φυσικά είναι ίδιο με τη διανομή k μη διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές όταν καμία υποδοχή δεν πρέπει να μείνει κενή.

Παράδειγμα: Έχω τρεις ομάδες αντικειμένων: Α, Β, και Γ. Θέλω τη ΓΣ για την επιλογή αντικειμένων από αυτές τις ομάδες ώστε (α) τουλάχιστον 2 και το πολύ 10 αντικείμενα να επιλέγονται από την ομάδα Α, (β) περιττός αριθμός αντικειμένων να επιλέγεται από την ομάδα Β, (γ) ο αριθμός των αντικειμένων από την ομάδα Γ να είναι άρτιος και να μην ξεπερνά το 20. Ποιός συντελεστής δίνει τον αριθμό των τρόπων να επιλέξω 5 αντικείμενα;

[1] Η απόδειξη του ίδιου αποτελέσματος με συνδυαστικά επιχειρήματα παρουσιάζεται στις σελίδες 92-93 του βιβλίου του C.L. Liu, Σχέση (3.3).

Η ΓΣ είναι:

$$(x^2 + x^3 + \ldots + x^{10})(x + x^3 + x^5 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{20})$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του x^5 και η τιμή του είναι 3. Γενικά ο συντελεστής του x^k δίνει τον αριθμό των τρόπων να επιλέξω k αντικείμενα σύμφωνα με τους περιορισμούς.

Παράδειγμα: Έχουμε 5 μπλε μπάλες των 5 κιλών, 10 πράσινες των 2 κιλών και απεριόριστο αριθμό από κόκκινες μπάλες του 1 κιλού. Ζητούνται οι ΓΣ για τα ακόλουθα:
α) Διαφορετικούς τρόπους να επιλέξουμε n μπάλες, και
β) Διαφορετικούς τρόπους να επιλέξουμε μπάλες που το συνολικό τους βάρος είναι n.

α) Η ΓΣ είναι:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + \ldots + x^{10})(1 + x + x^2 + \ldots)$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του x^n.
β) Σε αυτή την περίπτωση οι εκθέτες του x καθορίζονται από το βάρος κάθε μπάλας. Έτσι, η ΓΣ είναι:

$$(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25})(1 + x^2 + \ldots + x^{20})(1 + x + x^2 + \ldots)$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του x^n.