Θεωρία Γραφημάτων: Ταιριάσματα

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: `fotakis@aegean.gr`

1 Βασικοί Ορισμοί και Ορολογία

Έστω γράφημα $G(V, E)$. Ένα επικαλύπτον (spanning) υπογράφημα όπου όλες οι κορυφές έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο του k ονομάζεται *k-παράγοντας* του G (k-factor). Ένας k-παράγοντας ονομάζεται *τέλειος* (perfect) όταν όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ακριβώς k. Οι πιο σημαντικοί παράγοντες ενός γραφήματος είναι οι 1-παράγοντες και οι 2-παράγοντες.

Μια διαμέριση των κορυφών του G σε απλούς κύκλους και απλά μονοπάτια συνιστά έναν 2-παράγοντα. Μια διαμέριση των κορυφών του G σε κύκλους συνιστά έναν τέλειο 2-παράγοντα. Ένας κύκλος Hamilton αποτελεί έναν τέλειο 2-παράγοντα (και μάλιστα συνεκτικό). Αντίστροφα, κάθε συνεκτικός τέλειος 2-παράγοντας ενός γραφήματος είναι κύκλος Hamilton. Επομένως, ο υπολογισμός του τέλειου 2-παράγοντα με τον ελάχιστο αριθμό κύκλων/συνεκτικών συνιστωσών αποτελεί ισοδύναμο πρόβλημα με το να αποφανθούμε αν ένα γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

Οι 1-παράγοντες του G ονομάζονται *ταιριάσματα* (matchings). Ισοδύναμα, ένα υποσύνολο ακμών $M \subseteq E$ ονομάζεται ταίριασμα του G όταν κάθε κορυφή εφάπτεται σε μία το πολύ ακμή του M (με απλά λόγια, οι ακμές του M δεν έχουν κοινά άκρα). Θα λέμε ότι μια κορυφή που εφάπτεται σε ακμή του M έχει *ταίρι* ή είναι *ταιριασμένη* (matched) στο M. Μια κορυφή που δεν έχει ταίρι θα λέμε ότι είναι *ελεύθερη* (free) στο M.

Τέλεια, Μέγιστα, και Μεγιστοτικά Ταιριάσματα. Ένα ταίριασμα ονομάζεται *τέλειο* (perfect matching) όταν όλες οι κορυφές έχουν ταίρι στο M. Ένα ταίριασμα ονομάζεται *μέγιστο* (maximum matching) αν δεν υπάρχει ταίριασμα με μεγαλύτερο αριθμό ακμών. Κάθε τέλειο ταίριασμα είναι μέγιστο, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει (να δώσετε συγκεκριμένα παραδείγματα). Ένα ταίριασμα M ονομάζεται *μεγιστοτικό* (maximal) αν δεν υπάρχει ακμή στο $E \setminus M$ (δηλ. εκτός M) που να έχει ελεύθερες κορυφές σαν άκρα.

Πρόταση 1. *Ένα ταίριασμα M είναι μεγιστοτικό αν και μόνο αν οι ελεύθερες κορυφές στο M αποτελούν ένα σύνολο ανεξαρτησίας.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του ορισμού του μεγιστοτικού ταιριάσματος. □

Η Πρόταση 1 προτείνει τον ακόλουθο απλό αλγόριθμο για τον υπολογισμό ενός μεγιστοτικού ταιριάσματος. Ξεκινάμε με ένα οποιοδήποτε ταίριασμα (π.χ. κενό σύνολο ακμών). Ενόσω οι ελεύθερες κορυφές του τρέχοντος ταιριάσματος δεν αποτελούν σύνολο ανεξαρτησίας, προσθέτουμε μια ακμή με ελεύθερα άκρα στο ταίριασμα. Όταν ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος, έχουμε ένα μεγιστοτικό ταίριασμα.

Εναλλακτικά και Επαυξητικά Μονοπάτια. Έστω M ταίριασμα στο γράφημα $G(V, E)$. Ένα μονοπάτι του G του οποίου οι ακμές εναλλάσσονται στα σύνολα $E \setminus M$ και M ονομάζεται *εναλλακτικό* (alternating) μονοπάτι για το M. Ένα εναλλακτικό μονοπάτι με άκρα ελεύθερες κορυφές ονομάζεται *επαυξητικό* (augmenting) μονοπάτι για το M.

Έστω p ένα επαυξητικό μονοπάτι για το M. οι ακμές του p που δεν ανήκουν στο M δεν έχουν κοινά άκρα, γιατί οι ακμές του $p \setminus M$ και του M εναλλάσσονται. Επομένως, οι ακμές του $p \setminus M$ αποτελούν ταίριασμα και καλύπτουν όλες τις κορυφές του p. Οι ακμές του $p \setminus M$ είναι κατά μία περισσότερες από τις ακμές του $p \cap M$, γιατί τα δύο άκρα του p είναι ελεύθερες κορυφές. Οι ταιριασμένες κορυφές στο $M \setminus (p \cap M)$ είναι διαφορετικές από τις ταιριασμένες κορυφές στο $p \setminus M$, αφού το $M \setminus (p \cap M)$ αποτελείται από τις ακμές του M που δεν ανήκουν στο p. Συνεπώς, το σύνολο $(M \setminus (p \cap M)) \cup (p \setminus M)$ αποτελεί ταίριασμα στο G και έχει $|M| + 1$ ακμές (δηλαδή μία ακμή περισσότερη από το M). Από το γεγονός αυτό προέρχεται η ονομασία του επαυξητικού μονοπατιού.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $(M \setminus (p \cap M)) \cup (p \setminus M)$ ταυτίζεται με το σύνολο $(M \cup p) \setminus (M \cap p)$. Το τελευταίο αποτελεί τη λεγόμενη *συμμετρική διαφορά* των συνόλων M και p. Υπενθυμίζουμε ότι η συμμετρική διαφορά των συνόλων M και p συμβολίζεται με $M \oplus p$ και αποτελείται από όλα τα διαφορετικά στοιχεία των δύο συνόλων. Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Πρόταση 2. *Για κάθε ταίριασμα M και κάθε επαυξητικό μονοπάτι p για το M, το $M \oplus p$ αποτελεί ταίριασμα με $|M| + 1$ ακμές.*

2 Χαρακτηρισμός Μέγιστων Ταιριασμάτων

Θεώρημα 1 (Θεώρημα του Berge). *Ένα ταίριασμα M είναι μέγιστο αν και μόνο αν δεν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι για το M.*

Απόδειξη. Έστω M ταίριασμα στο γράφημα $G(V, E)$. Ισοδύναμα, θα αποδείξουμε ότι το M δεν είναι μέγιστο αν και μόνο αν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι για το M (αντιθετο-αντιστροφή).

Αν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι p για το M, έχουμε ήδη αποδείξει (Πρόταση 2) ότι το $M \oplus p$ αποτελεί ταίριασμα με μια ακμή περισσότερη από το M. Συνεπώς, το M δεν είναι μέγιστο.

Για το αντίστροφο, έστω ότι το M δεν είναι μέγιστο και έστω ένα μέγιστο ταίριασμα M' για το γράφημα $G(V, E)$. Εξ' ορισμού είναι $|M'| > |M|$ (δηλ. το M' έχει περισσότερες ακμές από το M). Στο υπογράφημα $G(V, M \cup M')$, κάθε κορυφή έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του 2. Δηλαδή, το $M \cup M'$ είναι ένας 2-παράγοντας του G. Άρα το $G(V, M \cup M')$ αποτελείται από (απλούς) κύκλους και (απλά) μονοπάτια στα οποία οι ακμές του M' εναλλάσσονται με τις ακμές του M (επειδή και τα M' και M είναι ταιριάσματα).

Παρατηρούμε ότι κάθε κύκλος στο $G(V, M \cup M')$ έχει ίδιο αριθμό ακμών από το M και το M' και ότι μόνο ένα μονοπάτι μπορεί να έχει περισσότερες ακμές από κάποιο από τα δύο ταιριάσματα. Επειδή λοιπόν το M' έχει περισσότερες ακμές από το M, το $G(V, M \cup M')$ πρέπει να περιέχει μονοπάτι p στο οποίο οι ακμές του M' να είναι περισσότερες από τις ακμές του M. Αφού στο p εναλλάσσονται οι ακμές των M' και M, ο μόνος τρόπος να συμβεί αυτό είναι οι αρχική και τελική ακμή του p να ανήκουν στο M'.

Επομένως, οι ακμές του p εναλλάσσονται στα $E \setminus M$ και M, και τα άκρα του p είναι ελεύθερα στο M. Άρα το p είναι επαυξητικό μονοπάτι για το M στο γράφημα G. $\square$

Το Θεώρημα του Berge προτείνει την ακόλουθη μεθοδολογία υπολογισμού ενός μέγιστου ταιριάσματος: Ξεκινάμε με ένα οποιοδήποτε ταίριασμα (π.χ. το κενό σύνολο ακμών ή ένα μεγιστοτικό ταίριασμα). Έστω M το τρέχον ταίριασμα σε κάθε βήμα του αλγόριθμου. Ενόσω το M δεν είναι μέγιστο ταίριασμα, βρίσκουμε ένα επαυξητικό μονοπάτι p (το Θεώρημα 1 εγγυάται την ύπαρξη επαυξητικού μονοπατιού). Αντικαθιστούμε το τρέχον ταίριασμα με το $M \oplus p$, που είναι ταίριασμα και έχει μια ακμή παραπάνω. Όταν η παραπάνω διαδικασία ολοκληρωθεί, έχουμε ένα μέγιστο ταίριασμα.

Δυστυχώς, η απόδειξη του Θεωρήματος του Berge δεν είναι κατασκευαστική αφού δεν περιγράφει πως μπορούμε να υπολογίσουμε ένα επαυξητικό μονοπάτι για ένα ταίριασμα που δεν είναι μέγιστο.

3 Τέλεια Ταιριάσματα σε Διμερή Γραφήματα

Σε αυτή την ενότητα, θα αποδείξουμε το Θεώρημα του Hall που χαρακτηρίζει τα τέλεια ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα με ίδιο αριθμό κορυφών στα δύο μέρη. Η απόδειξη του Θεωρήματος του Hall είναι κατασκευαστική και επιτρέπει να υπολογίσουμε ένα τέλειο ταίριασμα ή να πιστοποιήσουμε ότι δεν υπάρχει.

Για τη διατύπωση του Θεωρήματος του Hall, χρειαζόμαστε τον ακόλουθο συμβολισμό. Έστω γράφημα $G(V, E)$, και έστω $S \subseteq V$ ένα υποσύνολο κορυφών του. Συμβολίζουμε με $\Gamma(S)$ το σύνολο των κορυφών που συνδέονται με κορυφές στο S. Τυπικά, $\Gamma(S) = \{v \in V : \exists u \in S, \{u, v\} \in E\}$. Το σύνολο $\Gamma(S)$ ονομάζεται *γειτονιά* του S. Έστω M ένα ταίριασμα στο διμερές γράφημα $G(X, Y, E)$, και έστω S ένα υποσύνολο κορυφών του X (αντίστοιχα του Y) που είναι ταιριασμένες στο M. Συμβολίζουμε με $M(S)$ το σύνολο των κορυφών του Y (αντίστοιχα του X) που συνδέονται με τις κορυφές του S από τις ακμές του M (δηλ. τα "ταίρια" των κορυφών του S στο M). Αφού κάθε κορυφή του S έχει ταίρι στο M, είναι $|M(S)| = |S|$.

Θεώρημα 2 (Θεώρημα του Hall). *Έστω διμερές γράφημα $G(X, Y, E)$ με $|X| = |Y|$. Το γράφημα G έχει τέλειο ταίριασμα αν και μόνο αν για κάθε $S \subseteq X$, $|\Gamma(S)| \geq |S|$.*

Απόδειξη. Έστω M τέλειο ταίριασμα στο G. Για κάθε $S \subseteq X$, είναι $|M(S)| = |S|$ επειδή το M είναι τέλειο και όλες οι κορυφές του S είναι ταιριασμένες. Ο αριθμός όλων των γειτόνων του S δεν μπορεί να είναι μικρότερος από $|M(S)|$. Τυπικά, $|\Gamma(S)| \geq |S|$ όπως απαιτεί το θεώρημα.

Για το αντίστροφο, έστω διμερές γράφημα $G(X, Y, E)$ με $|X| = |Y|$ για το οποίο ισχύει ότι $\forall S \subseteq X$, $|\Gamma(S)| \geq |S|$. Για να καταλήξουμε σε άτοπο, υποθέτουμε ότι το G δεν έχει τέλειο ταίριασμα. Έστω λοιπόν M ένα μέγιστο ταίριασμα του G, το οποίο από την υπόθεση που κάναμε δεν είναι τέλειο. Έστω $w \in X$ μια ελεύθερη κορυφή στο M. Αφού $|X| = |Y|$, υπάρχει τουλάχιστον μία ελεύθερη κορυφή στο Y. Θα καταλήξουμε σε άτοπο κατασκευάζοντας επαυξητικό μονοπάτι για το M που ξεκινάει από τη w και καταλήγει σε ελεύθερη κορυφή του Y. Αυτό βρίσκεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το M είναι μέγιστο (βλ. Θεώρημα 1).

Θα περιγράψουμε τη διαδικασία κατασκευής του επαυξητικού μονοπατιού. Αρχικά έστω $Y_0 = \emptyset$. Η διαδικασία εξελίσεται σε φάσεις που αριθμούνται με το δείκτη $i = 0, 1, 2, \ldots$. Η διαδικασία ολοκληρώνεται στη φάση i αν το Y_i περιέχει ελεύθερη κορυφή. Διαφορετικά συνεχίζει στην επόμενη φάση θέτοντας $X_{i+1} = M(Y_i) \cup \{w\}$ και $Y_{i+1} = \Gamma(X_{i+1})$.

Παρατηρούμε ότι για να δημιουργήσουμε το X_{i+1} χρησιμοποιούμε ακμές του M και ότι οι κορυφές που εμφανίζονται πρώτη φορά στο Y_{i+1} συνδέονται με αυτές του X_{i+1} με ακμές εκτός του M. Παρατηρούμε επίσης ότι ο μοναδικός τρόπος να ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία είναι να καταλήξουμε σε ελεύθερη κορυφή του Y.

Θα δείξουμε ότι αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχίζεται για πάντα. Έστω $y_i = |Y_i|$ και $x_i = |X_i|$ οι πληθάριθμοι των συνόλων Y_i και X_i σε κάθε φάση. Αρχικά είναι $y_0 = 0$ και $x_1 = 1$. Ο πληθάριθμος του συνόλου Y_i αυξάνεται όταν το Y_i δεν περιέχει ελεύθερες κορυφές. Αρχικά, $y_0 = 0$. Για κάθε φάση i, $i = 0, 1, \ldots$, είναι $x_{i+1} = y_i + 1$ επειδή $X_{i+1} = M(Y_i) \cup \{w\}$. Υπενθυμίζουμε ότι $|M(Y_i)| = |Y_i|$ επειδή το Y_i δεν περιέχει ελεύθερες κορυφές και ότι το w είναι ελεύθερη κορυφή (άρα δεν ανήκει στο $M(Y_i)$). Επίσης, είναι $y_{i+1} \geq x_{i+1} = y_i + 1 > y_i$ γιατί $Y_{i+1} = \Gamma(X_{i+1})$ και ισχύει ότι $|\Gamma(S)| \geq |S|$ για κάθε $S \subseteq X$.

Αφού το σύνολο Y_i μεγαλώνει σε κάθε φάση και το $|Y|$ είναι πεπερασμένο, η παραπάνω διαδικασία θα ολοκληρωθεί καταλήγοντας σε μια ελεύθερη κορυφή $v \in Y$. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι το μονοπάτι από την w στη v αποτελεί ένα εναλλακτικό μονοπάτι, άρα και ένα επαυξητικό μονοπάτι αφού έχει δύο ελεύθερα άκρα.

Η παραπάνω διαδικασία δημιουργεί ένα δέντρο εναλλακτικών μονοπατιών[1] με ρίζα (επίπεδο 0) την κορυφή w, στο πρώτο επίπεδο τις κορυφές του Y_1, στο δεύτερο επίπεδο τις κορυφές του $M(Y_1)$, στο τρίτο επίπεδο τις κορυφές του $Y_2 \backslash Y_1$, στο τέταρτο επίπεδο της κορυφές του $M(Y_2 \backslash Y_1)$, και γενικά, στο επίπεδο $2i-1$ τις κορυφές του $Y_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} Y_j)$ (δηλαδή τις κορυφές του Y που εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στο Y_i) και στο επίπεδο $2i$ τις κορυφές του $M(Y_i(\bigcup_{j=1}^{i-1} Y_j))$ (δηλαδή τα "ταίρια" των νέων κορυφών του Y_i). Όλα τα μονοπάτια σε αυτό το δέντρο είναι εναλλακτικά γιατί οι ακμές από το επίπεδο $2(i-1)$ στο επίπεδο $2i-1$ δεν ανήκουν στο M και οι ακμές από το επίπεδο $2i-1$ στο επίπεδο $2i$ ανήκουν στο M. Έχουμε αποδείξει ότι το δέντρο αυτό συνεχίζει να μεγαλώνει (δηλ. σε κάθε φάση προστίθενται νέες κορυφές στο Y_i) μέχρι να φτάσουμε σε μια ελεύθερη κορυφή $v \in Y$.

Όμως το μονοπάτι από τη $w \in X$ στη $v \in Y$ είναι εναλλακτικό και έχει ελεύθερα άκρα. Άρα είναι επαυξητικό μονοπάτι για το M. Αυτό είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι το M είναι ένα μέγιστο ταίριασμα. $\square$

Επισήμανση. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μπορούμε να αποδείξουμε την ακόλουθη πιο γενική μορφή του Θεωρήματος του Hall που ισχύει για διμερή γραφήματα με διαφορετικό αριθμό κορυφών στα δύο μέρη. Έστω διμερές γράφημα $G(X,Y,E)$. Ένα ταίριασμα ονομάζεται X-τέλειο (X-perfect) αν δεν αφήνει καμία κορυφή του X ελεύθερη. Η γενική μορφή του Θεωρήματος του Hall είναι: Ένα διμερές γράφημα $G(X,Y,E)$ έχει X-τέλειο ταίριασμα αν και μόνο αν για κάθε $S \subseteq X$, $|\Gamma(S)| \geq |S|$. $\square$

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη του Θεωρήματος του Hall είναι κατασκευαστική. Έστω $G(X,Y,E)$ διμερές με $|X| = |Y|$. Ξεκινάμε με ένα οποιαδήποτε ταίριασμα στο $G(X,Y,E)$ (π.χ. ένα μεγιστοτικό ταίριασμα). Έστω M το τρέχον ταίριασμα. Ενόσω το M δεν είναι τέλειο,

[1] Το δέντρο αυτό είναι γνωστό και σαν δέντρο εναλλακτικών μονοπατιών του M με ρίζα το w. Κατασκευάζεται με Αναζήτηση Πρώτα σε Πλάτος (ξεκινώντας από ελεύθερη κορυφή $w \in X$) στο κατευθυνόμενο γράφημα που προκύπτει αν προσανατολίσουμε τις ακμές που δεν είναι στο M από το X στο Y, και τις ακμές στο M από το Y στο X.

εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία ξεκινώντας από ελεύθερη κορυφή $w \in X$. Αν βρούμε ένα επαυξητικό μονοπάτι p, αντικαθιστούμε το τρέχον ταίριασμα με το $M \oplus p$, το οποίο έχει μια ακμή παραπάνω, και συνεχίζουμε. Αν σε κάθε φάση βρίσκουμε επαυξητικό μονοπάτι, θα καταλήξουμε σε ένα τέλειο ταίριασμα. Αυτό φυσικά "πιστοποιεί" την ιδιότητα ότι το γράφημα έχει τέλειο ταίριασμα.

Αν σε κάποια δεν βρούμε επαυξητικό μονοπάτι, καταλήγουμε σε σύνολο Y_i που δεν περιέχει ελεύθερη κορυφή και έχει $\Gamma(M(Y_i) \cup \{w\}) = Y_i$ (οπότε δεν εμφανίζονται νέες κορυφές στην επόμενη φάση). Εντοπίζουμε λοιπόν ένα σύνολο $S = M(Y_i) \cup \{w\}$ με $|\Gamma(S)| < |S|$. Από το Θεώρημα του Hall, το σύνολο αυτό αποτελεί "πιστοποιητικό" ότι το γράφημα δεν έχει τέλειο ταίριασμα.