Βασικές Ιδιότητες Γεννητριών Συναρτήσεων

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: fotakis@aegean.gr

1 Γεννήτριες Συναρτήσεις

Η *συνήθης Γεννήτρια Συνάρτηση* μιας ακολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ δίνεται από τη σειρά $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$. Ο συντελεστής του x^i είναι ο i-οστός όρος της ακολουθίας[1] (δηλ. ο α_i).

Οι Γεννήτριες Συναρτήσεις (ΓΣ) αποτελούν έναν εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης / κωδικοποίησης των ακολουθιών. Κάθε ακολουθία αντιστοιχεί σε μια μοναδική ΓΣ και αντίστροφα. Αν γνωρίζουμε την ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ είναι εύκολο να υπολογίσουμε τη ΓΣ $A(x)$ με βάση τον ορισμό. Αν γνωρίζουμε τη ΓΣ $A(x)$ υπολογίζουμε τους όρους της ακολουθίας / συντελεστές των δυνάμεων του x από τη σχέση $\alpha_n = (1/n!)A^{(n)}(0)$, όπου $A^{(n)}(0)$ είναι η τιμή της n-οστής παραγώγου της $A(x)$ στο 0.

Για παράδειγμα, η ΓΣ της ακολουθίας με n-οστό όρο $\alpha_n = b\lambda^n$ είναι

$$A(x) = b\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x^i = \frac{b}{1-\lambda x}$$

Η ΓΣ της ακολουθίας $1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$ είναι $1 + x + x^2 + x^3$. Η ΓΣ της ακολουθίας $7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots$ είναι $7 + 6x + 5x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$. Αντίστροφα, η ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ $5/(1-4x)$ έχει n-οστό όρο $5 \cdot 4^n$, και στη ΓΣ $2+3x+4x^2+x^3$ αντιστοιχεί η ακολουθία $2, 3, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots$.

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε την ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ $\frac{1}{1+x}$.

Λύση. Εφαρμόζοντας το δυωνυμικό ανάπτυγμα[2], προκύπτει ότι

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 2 \cdots k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Επομένως, η ακολουθία είναι $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$. □

[1] Θα θεωρούμε πάντα ότι οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή x είναι αρκετά μικρές ώστε η σειρά να συγκλίνει. Εξ' αιτίας αυτής της υπόθεσης, μπορούμε να χειριστούμε τη σειρά σαν πεπερασμένο άθροισμα. Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι η συνάρτηση $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ είναι άπειρα παραγωγίσιμη (αναλυτική) και οι παράγωγοί της υπολογίζονται παραγωγίζοντας τη σειρά σαν πεπερασμένο άθροισμα. Με άλλα λόγια, $A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i\alpha_i x^{i-1}$.

[2] Το ανάπτυγμα της παράστασης $(1+x)^n$ είναι $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ όταν το n είναι φυσικός αριθμός, και $(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k$ διαφορετικά (π.χ. όταν το n είναι αρνητικός ακέραιος ή μη-ακέραιος αριθμός). Αυτό το ανάπτυγμα είναι γνωστό σαν *δυωνυμικό ανάπτυγμα*. Μια συνηθισμένη ειδική περίπτωση είναι το ανάπτυγμα του $(1-x)^{-n}$ όπου το n είναι φυσικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση, $(1-x)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$.

2 Βασικές Ιδιότητες

Για τη συνέχεια, θεωρούμε ακολουθίες $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ και $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$ με ΓΣ $A(x)$ και $B(x)$ αντίστοιχα.

Γραμμική Ιδιότητα. Έστω c, d σταθερές. Η ΓΣ της ακολουθίας $c\,\boldsymbol{\alpha} + d\,\boldsymbol{\beta}$ είναι $c\,A(x) + d\,B(x)$. Για παράδειγμα, η ΓΣ της ακολουθίας $4^n + 9 \cdot 2^n$ είναι $\frac{1}{1-4x} + \frac{9}{1-2x} = \frac{10-38x}{1-6x+8x^2}$. Αντίστροφα, για να βρούμε την ακολουθία με ΓΣ $\frac{9-47x}{1-10x+21x^2}$ αναλύουμε τη ΓΣ σε μερικά κλάσματα $\frac{5}{1-3x} + \frac{4}{1-7x}$. Η ακολουθία είναι $5 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n$.

Ιδιότητα της Ολίσθησης. Συμβολίζουμε με $S^k\boldsymbol{\alpha}$ την ακολουθία με τιμές:

$$(S^k\boldsymbol{\alpha})_n = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 0, \ldots, k-1. \\ \alpha_{n-k} & \text{για } n \geq k. \end{cases}$$

Δηλαδή πρόκειται για την ακολουθία που προκύπτει από την "δεξιά ολίσθηση" της $\boldsymbol{\alpha}$ κατά k όρους. Η ΓΣ της ακολουθίας $S^k\boldsymbol{\alpha}$ είναι η $x^k A(x)$. Πράγματι,

$$x^k A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^{j+k} = \sum_{n=0}^{k-1} 0x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{n-k} x^n$$

Το τελευταίο άθροισμα προκύπτει από το πρώτο με αλλαγή μεταβλητής (θέτουμε $n = j + k$).

Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα βρίσκουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots$ είναι $\frac{x^4}{1-x}$. Ομοίως, η ΓΣ της ακολουθίας $0, 0, 1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots$ είναι $\frac{x^2}{1-2x}$.

Συμβολίζουμε με $S^{-k}\boldsymbol{\alpha}$ την ακολουθία με τιμές:

$$(S^{-k}\boldsymbol{\alpha})_n = \alpha_{n+k} \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Δηλαδή πρόκειται για την ακολουθία που προκύπτει από την "αριστερή ολίσθηση" της $\boldsymbol{\alpha}$ κατά k όρους. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $S^{-k}\boldsymbol{\alpha}$ είναι:

$$x^{-k}\left(A(x) - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x^i\right)$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα, βρίσκουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $8, 16, 32, \ldots, 2^{n+3}, \ldots$ είναι:

$$x^{-3}[\tfrac{1}{1-2x} - 1 - 2x - 4x^2] = \tfrac{8}{1-2x}$$

Βέβαια σε αυτή την απλή περίπτωση μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Άσκηση 2. Έστω ακολουθία $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ με ΓΣ $A(x)$. Να υπολογίσετε τη ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = c\alpha_n + d$, όπου c, d δύο σταθερές.

Λύση. Από τη γραμμική ιδιότητα προκύπτει ότι η ζητούμενη ΓΣ είναι $B(x) = cA(x) + \frac{d}{1-x}$. □

Άσκηση 3. Έστω ακολουθία $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ με ΓΣ $A(x)$. Να υπολογίσετε τη ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = c^n \alpha_n$, όπου c μία σταθερά.

Λύση. Από τον ορισμό προκύπτει ότι η ζητούμενη ΓΣ είναι $B(x) = A(cx)$. □

Ιδιότητα Μερικών Αθροισμάτων. Η ακολουθία $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$ ονομάζεται και ακολουθία των *μερικών αθροισμάτων* της α_n. Έστω $\Gamma(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας γ_n. Είναι $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{1-x}$. Αυτό προκύπτει παρατηρώντας ότι $\alpha_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$. Από την γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, έχουμε ότι $A(x) = \Gamma(x) - x\Gamma(x)$.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $\gamma_n = n + 1$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\alpha_n = 1$. Αφού η ΓΣ της α_n είναι $A(x) = \frac{1}{(1-x)}$, η ΓΣ της γ_n είναι $\Gamma(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης, συμπεραίνουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $\gamma_{n-1} = n$ είναι $x\Gamma(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Χρησιμοποιώντας πάλι την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων, προκύπτει ότι η ακολουθία $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} i$ έχει σαν ΓΣ την $\Delta(X) = \frac{x}{(1-x)^3}$.

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε τον κλειστό τύπο της ακολουθίας την $\Delta(X) = \frac{x}{(1-x)^3}$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η $\Delta(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$ αποτελεί ΓΣ της ακολουθίας $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} i$. Ουσιαστικά η άσκηση ζητάει να υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i$. Φυσικά γνωρίζουμε ότι $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$. Εδώ θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ΓΣ. Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και έχουμε ότι

$$(1-x)^{-3} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

Από την ιδιότητας της ολίσθησης,

$$x(1-x)^{-3} = 0x^0 + 1x + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{k+1} = 0 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k$$

Ο όρος δ_n είναι ο συντελεστής του x^n στο παραπάνω ανάπτυγμα. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\sum_{i=0}^{n} i = \binom{n+1}{2}$. Ο υπολογισμός (πολύπλοκων) αθροισμάτων είναι μία από τις πολλές σημαντικές εφαρμογές των ΓΣ. □

Ιδιότητα Συμπληρωματικών Μερικών Αθροισμάτων. Η ακολουθία $\delta_n = \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i$ ονομάζεται και ακολουθία των *συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων* της α_n. Έστω $\Delta(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας των συμπληρωματικών δ_n. Είναι $\Delta(x) = \frac{A(1)-xA(x)}{1-x}$. Αυτό προκύπτει παρατηρώντας ότι $\alpha_n = \delta_n - \delta_{n+1}$. Από την γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, έχουμε ότι

$$A(x) = D(x) - x^{-1}(D(x) - \delta_0) \Rightarrow \delta_0 - xA(x) = (1-x)D(x) \Rightarrow D(x) = \frac{\delta_0 - xA(x)}{1-x}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι $\delta_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = A(1)$.

Ιδιότητα της Συνέλιξης. Η ακολουθία $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i b_{n-i}$ ονομάζεται συνέλιξη των ακολουθιών $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ και συμβολίζεται $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta}$. Έστω $\Gamma(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας $\boldsymbol{\gamma}$. Είναι $\Gamma(x) = A(x)B(x)$. Με απλά λόγια, η ΓΣ της συνέλιξης δύο ακολουθιών δίνεται από το γινόμενο των ΓΣ τους.

Το γεγονός ότι $\Gamma(x) = A(x)B(x)$ προκύπτει εύκολα από τον ορισμό του γινομένου πολυωνύμων. Πράγματι, ο συντελεστής του x^n στο γινόμενο $A(x)B(x)$ είναι ίσος με $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ επειδή όλοι οι δυνατοί τρόποι για να πάρουμε το x^n στο γινόμενο προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας το x^i στο $A(x)$ με το x^{n-i} στο $B(x)$, για όλα τα $i = 0, \ldots, n$.

Άσκηση 5. Να αποδείξετε ότι η πράξη της συνέλιξης είναι πράξη αντιμεταθετική. Δηλαδή να αποδείξετε ότι για οποιεσδήποτε ακολουθίες $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, ισχύει ότι $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} * \boldsymbol{\alpha}$.

Λύση. Το γινόμενο πολυωνύμων είναι αντιμεταθετική πράξη. Από την ιδιότητα της συνέλιξης, οι ακολουθίες $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\beta} * \boldsymbol{\alpha}$ έχουν την ίδια ΓΣ. Άρα πρόκειται για τις ίδιες ακολουθίες. $\square$

Άσκηση 6. Να αποδείξετε την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης.

Λύση. Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη της ακολουθίας $\boldsymbol{\alpha}$ με την ακολουθία $\beta_n = 1$ είναι $\sum_{i=0}^{n} a_i$, δηλαδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\boldsymbol{\alpha}$. Έστω $A(x)$ η ΓΣ της $\boldsymbol{\alpha}$. Γνωρίζουμε ότι η ΓΣ της $\beta_n = 1$ είναι $B(x) = (1-x)^{-1}$. Από την ιδιότητα της συνέλιξης, η ΓΣ της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της $\boldsymbol{\alpha}$ είναι $\frac{A(x)}{1-x}$. $\square$

Άσκηση 7. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} 3^i\, 2^{n-i}$ με τη μέθοδο των ΓΣ.

Λύση. Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο άθροισμα είναι ο n-οστός όρος της συνέλιξης των ακολουθιών $\alpha_n = 3^n$ και $\beta_n = 2^n$. Η πρώτη ακολουθία έχει ΓΣ $A(x) = \frac{1}{1-3x}$ και η δεύτερη ακολουθία έχει ΓΣ $B(x) = \frac{1}{1-2x}$. Η ΓΣ της συνέλιξης τους είναι

$$\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$$

Το τελευταίο βήμα προκύπτει με μερική κλασματική ανάλυση. Από τη γραμμική ιδιότητα, η ακολουθία που αντιστοιχεί σε αυτή τη ΓΣ έχει n-οστό όρο $3^{n+1} - 2^{n+1}$. Επομένως, $\sum_{i=0}^{n} 3^i\, 2^{n-i} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. $\square$

Ιδιότητα της Κλίμακας. Η ακολουθία $\gamma_n = n\alpha_n$ έχει ΓΣ τη $\Gamma(x) = xA'(x)$, όπου $A'(x)$ είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $A(x)$. Πράγματι,

$$\Gamma(x) = xA'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n x^n)' = x\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n\alpha_n)x^n$$

Η ακολουθία $\delta_n = \frac{\alpha_n}{n+1}$ έχει ΓΣ τη

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η παράγουσα του z^n είναι $\frac{z^{n+1}}{n+1}$, έχουμε

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \alpha_n z^n dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^n$$

Και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι όταν η άπειρη σειρά συγκλίνει, μπορούμε να τη χειριστούμε σαν πεπερασμένο άθροισμα.

Άσκηση 8. Να υπολογίσετε τη ΓΣ της ακολουθίας $\alpha_n = n(n+1)$.

Λύση. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η ακολουθία $\beta_n = n$ έχει ΓΣ την $B(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Από την ιδιότητα της κλίμακας, η $\gamma_n = n^2$ έχει ΓΣ $\Gamma(x) = xB'(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$. Από τη γραμμική ιδιότητα, η ακολουθία $\alpha_n = n(n+1) = n^2 + n$ έχει ΓΣ την

$$\Gamma(x) + B(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Άσκηση 9. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i^2$ χρησιμοποιώντας ΓΣ.

Λύση. Η ΓΣ για την ακολουθία $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$ είναι $\Gamma(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$. Η τιμή του αθροίσματος δίνεται από το συντελεστή του x^n στο ανάπτυγμα της $\Gamma(x)$. □

Άσκηση 10. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i^3$ χρησιμοποιώντας ΓΣ.

Λύση. Η ΓΣ για την ακολουθία $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} i^3$ είναι $\Delta(x) = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^5}$. Η τιμή του αθροίσματος δίνεται από το συντελεστή του x^n στο ανάπτυγμα της $\Delta(x)$. □

Άσκηση 11. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i(i+1)(i+2)(i+3)$.

Ανάλυση σε Κλάσματα και Αντιστροφή Γεννητριών Συναρτήσεων. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ακολουθία με ΓΣ $P(x)/D(x)$, όπου $P(x), D(x)$ είναι πολυώνυμα του x. Αυτό που κάνουμε είναι να εφαρμόσουμε μερική κλασματική ανάλυση είτε απ' ευθείας στη συνάρτηση $P(x)/D(x)$ είτε στη συνάρτηση $1/D(x)$. Από το αποτέλεσμα της ανάλυσης σε μερικά κλάσματα, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ακολουθία με την αντίστοιχη ΓΣ. Αν πρόκειται για την $1/D(x)$, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ολίσθησης και τη γραμμική ιδιότητα και υπολογίζουμε την ακολουθία με ΓΣ $P(x)/D(x)$.

Άσκηση 12. Να υπολογίσετε την ακολουθία με ΓΣ $\frac{2}{1-4x^2}$.

Λύση. Εφαρμόζοντας μερική κλασματική ανάλυση, καταλήγουμε ότι

$$\frac{2}{1-4x^2} = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x}$$

Η ακολουθία με ΓΣ $\frac{1}{1-2x}$ είναι η $\beta_n = 2^n$. Η ακολουθία με ΓΣ $\frac{1}{1+2x}$ είναι η $\gamma_n = (-2)^n$ (για το τελευταίο, εργαζόμαστε όπως στην Άσκηση 1. Από τη γραμμική ιδιότητα, η ζητούμενη ακολουθία είναι

$$\alpha_n = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 0 & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Άσκηση 13. Να υπολογίσετε την ακολουθία με ΓΣ $\frac{22x^3-9x^2-14x-1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$.

Λύση. Εφαρμόζοντας μερική κλασματική ανάλυση, έχουμε

$$\frac{1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2} = \frac{-1/18}{1+x} + \frac{27/50}{1+3x} + \frac{56/225}{1-2x} + \frac{4/15}{(1-2x)^2}$$

Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία με ΓΣ $(1+x)^{-1}$ είναι η $(-1)^n$. Εφαρμόζοντας τη γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία με ΓΣ την $\frac{(-1/18)(22x^3-9x^2-14x-1)}{1+x}$ είναι η

$$-\tfrac{1}{18}\left[22(-1)^{n-3}-9(-1)^{n-2}-14(-1)^{n-1}-(-1)^n\right]=-\tfrac{1}{18}\left[-22-9+14-1\right](-1)^n=(-1)^n$$

Ομοίως, η ακολουθία με ΓΣ $(1+3x)^{-1}$ είναι η $(-3)^n$. Από τη γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, έχουμε ότι η ακολουθία με ΓΣ την $\frac{(27/50)(22x^3-9x^2-14x-1)}{1+3x}$ είναι η

$$\tfrac{27}{50}\left[22(-3)^{n-3}-9(-3)^{n-2}-14(-3)^{n-1}-(-3)^n\right]=\tfrac{27}{50}\left[-22/27-9/9+14/3-1\right](-3)^n=(-3)^n$$

Ομοίως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία με ΓΣ την $\frac{(56/225)(22x^3-9x^2-14x-1)}{1-2x}$ είναι

$$\tfrac{56}{225}\left[22\cdot 2^{n-3}-9\cdot 2^{n-2}-14\cdot 2^{n-1}-2^n\right]=\tfrac{56}{225}\left[22/8-9/4-14/2-1\right]2^n=-\tfrac{28}{15}\,2^n$$

Τέλος, η ακολουθία με ΓΣ $(1-2x)^{-2}$ είναι η $(n+1)2^n$. Εφαρμόζοντας τη γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία με ΓΣ την $\frac{(4/15)(22x^3-9x^2-14x-1)}{(1-2x)^2}$ είναι η

$$\begin{aligned}&\tfrac{4}{15}\left[22\cdot(n-2)2^{n-3}-9\cdot(n-1)2^{n-2}-14\cdot n2^{n-1}-(n+1)2^n\right]=\\&\quad\tfrac{4}{15}\left[22/8-9/4-14/2-1\right]n\,2^n+\tfrac{4}{15}\left[-2(22/8)+9/4-1\right]2^n=-2\,n\,2^n-\tfrac{17}{15}\,2^n\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ζητούμενη ακολουθία είναι

$$\alpha_n=(-1)^n+(-3)^n-2\,n\,2^n-\tfrac{28+17}{15}\,2^n=(-1)^n+(-3)^n-n\,2^{n+1}-3\cdot 2^n$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η ζητούμενη ακολουθία μπορεί να προκύψει ευκολότερα παρατηρώντας ότι η συγκεκριμένη ΓΣ μπορεί να αναλυθεί σε μερικά κλάσματα ως εξής

$$\frac{22x^3-9x^2-14x-1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+3x}-\frac{1}{1-2x}-\frac{2}{(1-2x)^2}$$

3 Εφαρμογές των Γεννητριών Συναρτήσεων

Οι ΓΣ έχουν πολλές και σημαντικές εφαρμογές. Στα πλαίσια του μαθήματος, θα δούμε παραδείγματα εφαρμογών των ΓΣ στον υπολογισμό αθροισμάτων, στην επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής, και στην επίλυση αναδρομικών εξισώσεων.

Και στις τρεις περιπτώσεις, η βασική ιδέα είναι ίδια. Το αρχικό πρόβλημα μπορεί να οριστεί διατυπώνοντας μια ή περισσότερες ακολουθίες (δηλαδή το πρόβλημα ορίζεται στο χώρο των ακολουθιών). Πολλές φορές είναι δύσκολο να λύσουμε το πρόβλημα με απευθείας χειρισμό αυτών των ακολουθιών (π.χ. υπολογισμός ενός δύσκολου αθροίσματος). Θα ήταν όμως εύκολο να λύσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα στο χώρο των ΓΣ. Υπολογίζουμε λοιπόν τις ΓΣ των ακολουθιών και μετασχηματίζουμε το πρόβλημα στο χώρο των ΓΣ. Έπειτα λύνουμε το πρόβλημα στο χώρο των ΓΣ χρησιμοποιώντας συνήθως αλγεβρικά εργαλεία. Τέλος, υπολογίζουμε την ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ που περιγράφει τη λύση του προβλήματος και αποκτούμε τη λύση του αρχικού μας προβλήματος. Αυτή τη μέθοδο ακολουθήσαμε για τον υπολογισμό των αθροισμάτων στις ασκήσεις 4, 7, 9, 10, 11.

Στη συνέχεια θα δούμε και άλλα παραδείγματα όπου εφαρμόζουμε την ίδια μέθοδο.

3.1 Υπολογισμός Αθροισμάτων

Άσκηση 14. Να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i(n-i)$.

Λύση. Η ΓΣ για την ακολουθία $\beta_n = \sum_{i=0}^{n} i(n-i)$ είναι $B(x) = \frac{x^2}{(1-x)^4}$. Η τιμή του αθροίσματος δίνεται από το συντελεστή του x^n στο ανάπτυγμα της $B(x)$. $\square$

Άσκηση 15. Να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i(n-i)^2$.

Λύση. Η ΓΣ για την ακολουθία $b_n = \sum_{i=0}^{n} i(n-i)^2$ είναι $B(x) = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^5}$. Η τιμή του αθροίσματος δίνεται από το συντελεστή του x^n στο ανάπτυγμα της $B(x)$. $\square$

Άσκηση 16. Να δείξετε (με χρήση ΓΣ) ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$. Η συνδυαστική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας είναι ότι ο αριθμός των διαφορετικών υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι 2^n.

Λύση. Ξέρουμε ότι για κάθε x, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$ (δυωνυμικό ανάπτυγμα). Το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας $x = 1$. $\square$

Άσκηση 17. Να δείξετε (με χρήση ΓΣ) ότι για κάθε φυσικό αριθμό n,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$$

Η συνδυαστική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας είναι για κάθε σύνολο με n στοιχεία, ο αριθμός των διαφορετικών υποσυνόλων που έχουν άρτιο αριθμό στοιχείων είναι ίσος με τον αριθμό των διαφορετικών υποσυνόλων που έχουν περιττό αριθμό στοιχείων

Λύση. Στο δυωνυμικό ανάπτυγμα $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n$, θέτουμε $x = -1$. Το αποτέλεσμα είναι $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$. Το ζητούμενο προκύπτει διατηρώντας τις άρτιες δυνάμεις του x στο αριστερό μέλος της ισότητας και μεταφέροντας τις περιττές δυνάμεις του x στο δεξιό μέλος. Αφού το άθροισμα των δύο (ίσων) μελών είναι 2^n (βλ. προηγούμενη άσκηση), κάθε μέλος είναι ίσο με 2^{n-1}. $\square$

Άσκηση 18. Να δείξετε (με χρήση ΓΣ) ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Λύση. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των δυωνυμικών συντελεστών ότι $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ και γράφουμε το ζητούμενο άθροισμα σαν το n-οστό όρο της συνέλιξης της ακολουθίας $\alpha_i = \binom{n}{i}$ με τον εαυτό της. Τυπικά,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

Η ΓΣ της ακολουθίας α_i είναι $(1+x)^n$. Από την ιδιότητα της συνέλιξης, η ΓΣ της συνέλιξης είναι της α_i με τον ευατό της είναι $(1+x)^{2n}$. Ο n-οστός όρος της συνέλιξης είναι ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα του $(1+x)^{2n}$. Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι $\binom{2n}{n}$, όπως απαιτείται. $\square$

Άσκηση 19. Να δείξετε (με χρήση ΓΣ) ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.

3.2 Επίλυση Προβλημάτων Συνδυαστικής

Άσκηση 20. Να δείξετε (με χρήση ΓΣ) ότι για $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Λύση. Για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει ότι $(1+x)^n = (1+x)^{n-1} + x(1+x)^{n-1}$. Το πρώτο μέλος είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Η συνάρτηση $(1+x)^{n-1}$ είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\binom{n-1}{k}$. Από την ιδιότητα της ολίσθησης, η συνάρτηση $x(1+x)^{n-1}$ είναι ΓΣ της ακολουθίας $\binom{n-1}{k-1}$. Το ζητούμενο προκύπτει από το γραμμική ιδιότητα. □

Άσκηση 21. Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, των 20, και των 10 λεπτών και θέλουμε να επιλέξουμε 10 κέρματα. Να διατυπώσετε τη ΓΣ και να υπολογίσετε πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι για την παραπάνω επιλογή.

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να διαλέξουμε k κέρματα. Για κάθε είδος κερμάτων, μπορούμε να διαλέξουμε κανένα ή ένα ή δύο, κλπ. Αυτό κωδικοποιείται από τη ΓΣ $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$. Αφού έχουμε τρία διαφορετικά είδη κερμάτων, η ΓΣ για την ακολουθία α_k είναι $(1-x)^{-3}$. Το ζητούμενο δίνεται από το α_{10}, που είναι ο συντελεστής του x^{10} στο ανάπτυγμα της ΓΣ. Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. Εδώ η λύση προκύπτει επίσης χρησιμοποιώντας συνδυασμούς αντικειμένων με επανάληψη. □

Άσκηση 22. Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, των 20, και των 10 λεπτών και θέλουμε να διαλέξουμε 10 από αυτά ώστε να έχουμε τουλάχιστον ένα κέρμα και το πολύ 8 κέρματα των 50 λεπτών, άρτιο αριθμό κερμάτων των 10 λεπτών, και ο αριθμός των κερμάτων των 20 λεπτών να είναι περιττός και να μην ξεπερνά το 5. Να διατυπώσετε τη ΓΣ και να υπολογίσετε πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι για την παραπάνω επιλογή.

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να διαλέξουμε k κέρματα με τους παραπάνω περιορισμούς. Για τα κέρματα των 50 λεπτών η ΓΣ είναι $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^8$, για τα κέρματα των 10 λεπτών η ΓΣ είναι $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$, και για τα κέρματα των 20 λεπτών η ΓΣ είναι $x + x^3 + x^5$. Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε είδος κερμάτων, έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k:

$$(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^8)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(x + x^3 + x^5)$$

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{10} στο ανάπτυγμα της ΓΣ. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι 11. □

Άσκηση 23. Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, των 20, και των 10 λεπτών. Να διατυπώσετε τη ΓΣ και να υπολογίσετε πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να σχηματίσουμε το ποσό των 2 ευρώ.

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να σχηματίσουμε το ποσό των k *λεπτών* διαλέγοντας από τα παραπάνω κέρματα. Για τα κέρματα των 50 λεπτών η ΓΣ είναι $1 + x^{50} + x^{100} + \ldots = \frac{1}{1-x^{50}}$, για τα κέρματα των 20 λεπτών η ΓΣ είναι $1 + x^{20} + x^{40} + \ldots = \frac{1}{1-x^{20}}$, και για τα κέρματα των 10 λεπτών η ΓΣ είναι $1 + x^{10} + x^{20} + \ldots = \frac{1}{1-x^{10}}$. Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε είδος κερμάτων, έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k:

$$\frac{1}{1-x^{50}} \cdot \frac{1}{1-x^{20}} \cdot \frac{1}{1-x^{10}}$$

Αφού θέλουμε να σχηματίσουμε το ποσό των 200 *λεπτών* (= 2 ευρώ), το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{200} στο ανάπτυγμα της ΓΣ. Για τη συγκεκριμένη άσκηση, είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το ζητούμενο συντελεστή κάνοντας τον παρακάτω πολλαπλασιασμό πολυωνύμων:

$$(1 + x^{50} + x^{100} + x^{200})(1 + x^{20} + x^{40} + \cdots + x^{200})(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{200})$$

Ο συντελεστής του x^{200} είναι 29. $\square$

Άσκηση 24. Να υπολογίσετε τη ΓΣ και τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να σχηματίσουμε το ποσό των 2 ευρώ υπό τους περιορισμούς της Άσκησης 22.

Άσκηση 25. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ σε 3 διακεκριμένους κουμπαράδες ώστε κανένας κουμπαράς να μην έχει πάνω από 20 ευρώ;

Άσκηση 26. Να βρείτε τη ΓΣ και τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $z_1 + \cdots + z_k = n$ στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα συνδυαστικής αντίστοιχο με αυτό το ερώτημα.

Άσκηση 27. Να βρείτε τη ΓΣ και τον αριθμό των λύσεων του συστήματος $\{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 10, z_1 \geq 2, z_2 \geq 1, z_3 \geq 1, z_4 \geq 3$ και περιττός$\}$ στο σύνολο των φυσικών αριθμών.

Άσκηση 28. Μια ομάδα στη διάρκεια του πρωταθλήματος δίνει 30 αγώνες. Τα δυνατά αποτελέσματα κάθε αγώνα είναι νίκη, ισοπαλία, και ήττα. Χρησιμοποιώντας ΓΣ να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών αποτελεσμάτων αν ο συνολικός αριθμός των νικών είναι περιττός, ο συνολικός αριθμός των ηττών είναι άρτιος, ενώ οι ισοπαλίες είναι τουλάχιστον 2 (ένα αποδεκτό συνολικό αποτέλεσμα είναι για παράδειγμα 7 νίκες, 16 ήττες και 7 ισοπαλίες).

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων υπό τους παραπάνω περιορισμούς σε k αγώνες συνολικά. Η ΓΣ για τις νίκες είναι $x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{29}$, επειδή ο αριθμός των νικών πρέπει να είναι περιττός. Η ΓΣ για τις ισοπαλίες είναι $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{30}$, επειδή οι ισοπαλίες είναι τουλάχιστον 2. Η ΓΣ για τις ήττες είναι $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{30}$, επειδή ο συνολικός αριθμός των ηττών είναι άρτιος. Η ΓΣ για την ακολουθία α_k είναι:

$$(x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{29})(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{30})(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{30})$$

Το ζητούμενο προκύπτει από το συντελεστή του x^{30} στο ανάπτυγμα της ΓΣ.

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή, επεκτείνουμε τα παραπάνω αθροίσματα μέχρι το άπειρο (έτσι έχουμε άπειρους όρους γεωμετρικής προόδου). Αυτό δεν επηρεάζει το συντελεστή του x^{30} επειδή οι όροι που προστίθενται έχουν εκθέτη μεγαλύτερο του 30. Υποθέτοντας λοιπόν ότι ο αριθμός των αγώνων είναι απεριόριστος, η ΓΣ γίνεται

$$A(x) = \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{x^2}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)^3(1+x)^2} = \frac{x^3}{(1-x^2)^3} + \frac{x^4}{(1-x^2)^3}$$

Εφαρμόζοντας το δυωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε:

$$\frac{x^3}{(1-x^2)^3} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{2k+3}$$

και

$$\frac{x^4}{(1-x^2)^3} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{2k+4}$$

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο ανάπτυγμα δεν υπάρχει το x^{30} (δηλαδή ο αντίστοιχος συντελεστής είναι 0). Στο δεύτερο ανάπτυγμα, το x^{30} εμφανίζεται για $k = 13$. Ο αντίστοιχος συντελεστής είναι $\binom{15}{2} = \frac{15\cdot 14}{2} = 105$. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός διαφορετικών αποτελεσμάτων για 30 αγώνες υπό τους συγκεκριμένους περιορισμούς είναι 105.

Γενικότερα, η ακολουθία α_k που δίνει τον αριθμό των διαφορετικών αποτελεσμάτων για k αγώνες υπό τους συγκεκριμένους περιορισμούς είναι $\alpha_k = \frac{k^2}{8} - \frac{k}{8}(1+(-1)^k) - \frac{1}{16}(1-(-1)^k)$. □

Άσκηση 29. Θέλουμε να μοιράσουμε 24 καραμέλες σε 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 8 καραμέλες. Να βρείτε τη ΓΣ και τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να γίνει αυτό.

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να μοιράσουμε k καραμέλες σε 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 8 καραμέλες. Η ΓΣ για κάθε παιδί είναι $x^3 + x^4 + \cdots + x^8$. Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε παιδί, έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k: $A(x) = (x^3+x^4+\cdots+x^8)^4$. Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{24} στο ανάπτυγμα της $A(x)$. Ένας τρόπος να υπολογίσουμε αυτό το συντελεστή είναι:

$$A(x) = (x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4 = x^{12}(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)^4 = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$$

Ο συντελεστής του x^{24} στο ανάπτυγμα της $A(x)$ είναι ο ίδιος με το συντελεστή του x^{12} στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$. Παρατηρείστε ότι σε αυτό το παράδειγμα δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το άθροισμα $x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^8$ μέχρι το άπειρο επειδή τα $x^9, \ldots, x^{24}$ συνεισφέρουν στο συντελεστή του x^{24}. Έτσι πρέπει να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της $(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$. Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι:

$$(1-x^6)^4(1-x)^{-4} = (1 - 4x^6 + 6x^{12} - \ldots)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k$$

Το x^{12} σχηματίζεται από το x^0 στον πρώτο όρο και το x^{12} στο δεύτερο (συντελεστής $\binom{15}{3}$), το x^6 και στους δύο όρους (συντελεστής $-4\binom{9}{3}$), και το x^{12} στον πρώτο όρο και το x^0 στο δεύτερο (συντελεστής 6). Ο ζητούμενος συντελεστής είναι:

$$\binom{15}{3} - 4\binom{9}{3} + 6 = \frac{15\cdot 14\cdot 13 - 4\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6} + 6 = 7(65-48) + 6 = 119 + 6 = 125$$