Θεωρία Γραφημάτων: Διμερή Γραφήματα

Δημήτρης Φωτάκης

Τμήμα Μηχανικών Πληροφοριακών και Επικοινωνιακών Συστημάτων
Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 83200 Καρλόβασι, Σάμος
Email: fotakis@aegean.gr

1 Βασικοί Ορισμοί

Ένα γράφημα ονομάζεται k-μερές (k-partite) αν οι κορυφές του μπορούν να διαμεριστούν[1] σε k σύνολα ανεξαρτησίας[2].

Πρόταση 1. *Ένα γράφημα είναι k-μερές αν και μόνο αν έχει χρωματικό αριθμό μικρότερο ή ίσο του k.*

Απόδειξη. Ένα k-μερές γράφημα έχει χρωματικό αριθμό το πολύ k, αφού οι κορυφές κάθε συνόλου ανεξαρτησίας μπορούν να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα. Αντίστροφα, ένα γράφημα με χρωματικό αριθμό το πολύ k είναι k-μερές αφού οι κορυφές του ίδιου χρώματος αποτελούν σύνολο ανεξαρτησίας. □

Στη συνέχεια εστιάζουμε στην (σημαντική) ειδική περίπτωση k-μερών γραφημάτων για $k = 2$. Ένα γράφημα ονομάζεται *διμερές* (bipartite) αν οι κορυφές του μπορούν να χωριστούν σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας. Ένα διμερές γράφημα είναι *πλήρες* όταν κάθε κορυφή στο ένα μέρος (σύνολο ανεξαρτησίας) συνδέεται με κάθε κορυφή στο άλλο μέρος. Το πλήρες διμερές γράφημα με n κορυφές στο ένα μέρος και m κορυφές στο άλλο μέρος συμβολίζεται με $K_{n,m}$ και έχει $n \cdot m$ ακμές.

Άσκηση 1. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών που μπορεί να περιέχει ένα απλό διμερές γράφημα με n κορυφές; Ισοδύναμα, να δείξετε ότι κάθε απλό γράφημα με n κορυφές και περισσότερες από $n^2/4$ ακμές δεν είναι διμερές.

Λύση. Ο μέγιστος αριθμός ακμών συμβαίνει όταν έχουμε το πλήρες διμερές γράφημα. Αφού όλες οι κορυφές είναι n, αν το ένα σύνολο κορυφών περιέχει k κορυφές, το δεύτερο θα περιέχει $(n-k)$. Ο συνολικός αριθμός ακμών του $K_{k,n-k}$ είναι $k(n-k)$. Το γινόμενο μεγιστοποιείται για $k = n/2$ αν το n είναι άρτιος και για $k = (n-1)/2$ αν το n είναι περιττός. Συνεπώς, αν το n είναι άρτιος, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $n^2/4$, ενώ αν το n είναι περιττός, ο μέγιστος αριθμός ακμών είναι $(n^2-1)/4$. Παρατηρείστε ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί είναι πάντα ακέραιοι. □

Συμβολίζουμε συνήθως με $G(X, Y, E)$ ένα διμερές γράφημα G του οποίου οι κορυφές διαμερίζονται σε σύνολα ανεξαρτησίας (μέρη) X και Y.

Θεώρημα 1. *Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.*

[1] Τα υποσύνολα $X_1, \ldots, X_k$ αποτελούν μια *διαμέριση* του συνόλου X όταν είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο ($\forall i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$) και η ένωσή τους είναι το X ($\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$).

[2] Ένα σύνολο κορυφών αποτελεί *σύνολο ανεξαρτησίας* (independent set) αν δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ τους.

Απόδειξη. Έστω διμερές γράφημα $G(,,E)$. Σε κάθε διαδρομή (ανοικτή ή κλειστή), οι κορυφές του X πρέπει να ακολουθούνται από κορυφές του Y, και οι κορυφές του Y πρέπει να ακολουθούνται από κορυφές του Y (επειδή τα X και Y είναι σύνολα ανεξαρτησίας). Επομένως, κάθε κύκλος είναι της μορφής $x_1y_1x_2y_2\dots x_\ell y_\ell x_1$ με τις κορυφές $x_1, x_2\dots, x_\ell \in X$ και τις κορυφές $y_1, y_2, \dots, y_\ell \in Y$. Το μήκος του κύκλου είναι 2ℓ, δηλαδή άρτιο. Άρα, αν ένα γράφημα είναι διμερές, έχει κύκλους μόνο άρτιου μήκους.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε συνεκτικό γράφημα $G(V,E)$ χωρίς κύκλους περιττού μήκους. Η υπόθεση ότι το γράφημα είναι συνεκτικό γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας. Αν το γράφημα δεν είναι συνεκτικό, το ζητούμενο ισχύει για κάθε συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος, και άρα για όλο το γράφημα. Θα δείξουμε πως κατασκευάζουμε τα δύο σύνολα ανεξαρτησίας του G.

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε κορυφή $v \in V$ και τις αποστάσεις της από όλες τις κορυφές του γραφήματος[3]. Στο X τοποθετούμε τη v και όλες τις κορυφές που βρίσκονται σε άρτια απόσταση από αυτή, και στο Y όλες τις κορυφές που βρίσκονται σε περιττή απόσταση από τη v. Τυπικά, $X = \{u \in V : d(v,u) \text{ άρτιος}\}$ και $Y = \{u \in V : d(v,u) \text{ περιττός}\}$. Τα σύνολα X και Y είναι σύνολα ανεξαρτησίας επειδή το γράφημα δεν έχει κύκλους περιττού μήκους. Πράγματι, αν υπήρχε ακμή μεταξύ δύο κορυφών $u, w \in X$ (ή του Y), η ένωση των συντομότερων μονοπατιών από τη v στη u και από τη v στην w με την ακμή $\{u,w\}$ δημιουργεί κύκλο περιττού μήκους.

Πιο αναλυτικά, έστω ότι υπάρχει ακμή μεταξύ δύο κορυφών $u, w \in X$. Θεωρούμε ένα συντομότερο μονοπάτι από τη u στη v, έστω p και ένα συντομότερο μονοπάτι από τη w στη v, έστω q. Εξ' ορισμού το μήκος του p είναι $d(v,u)$ και το μήκος του q είναι $d(v,w)$. Επίσης, οι αποστάσεις $d(v,u)$ και $d(v,w)$ είναι άρτιες γιατί οι κορυφές $u, w \in X$.

Έστω v_1 το πρώτο κοινό σημείο (πλησιέστερο προς τις u, w) των μονοπατιών p και q (τα p και q έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο επειδή καταλήγουν στην ίδια κορυφή). Γνωρίζουμε ότι κάθε τμήμα ενός συντομότερου μονοπατιού είναι επίσης συντομότερο μονοπάτι. Συνεπώς, τα τμήματα των p και q από τη v μέχρι τη v_1 αποτελούν συντομότερα μονοπάτια μεταξύ αυτών των κορυφών και πρέπει να έχουν (το ίδιο) μήκος ίσο με την απόσταση $d(v,v_1)$. Το τμήμα του p από v_1 μέχρι u, η (υποτιθέμενη) ακμή $\{u,w\}$, και το τμήμα του q από w μέχρι v_1 δημιουργούν ένα (απλό) κύκλο με μήκος

$$[d(u,v) - d(v,v_1)] + [d(w,v) - d(v,v_1)] + 1 = d(u,v) + d(w,v) + 1 - 2\,d(v,v_1)$$

Ο αριθμός αυτός είναι περιττός γιατί τα $d(u,v) + d(w,v)$ (άθροισμα άρτιων) και $2\,d(v,v_1)$ είναι άρτιοι αριθμοί. Αυτό αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το γράφημα δεν έχει κύκλο περιττού μήκους.

Αν θεωρήσουμε κορυφές $u, w \in Y$, το $d(u,v) + d(w,v)$ είναι επίσης άρτιος (σαν άθροισμα δύο περιττών) και καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. □

Παρατηρείστε ότι η παραπάνω απόδειξη είναι κατασκευαστική και μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν ένα γράφημα είναι διμερές και να πιστοποιήσουμε την απάντησή μας. Ξεκινώντας από μια οποιαδήποτε κορυφή, κατασκευάζουμε τα σύνολα X και Y όπως στην απόδειξη. Αν τα X και Y είναι σύνολα ανεξαρτησίας, γνωρίζουμε ότι το γράφημα είναι διμερές. Έχουμε μάλιστα υπολογίσει μια διαμέριση των κορυφών του σε δύο σύνολα ανεξαρτησίας, έχουμε δηλαδή ένα

[3] Η απόσταση δυο κορυφών v, u, συμβολίζεται με $d(v,u)$, είναι το μήκος του συντομότερου μονοπατιού μεταξύ τους.

“πιστοποιητικό” για το γεγονός ότι το γράφημα είναι διμερές. Αν το X (ή το Y) δεν είναι σύνολο ανεξαρτησίας, βρίσκουμε έναν κύκλο περιττού μήκους όπως περιγράφεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 1. Ο κύκλος περιττού μήκους αποτελεί ένα “πιστοποιητικό” ότι το γράφημα δεν είναι διμερές.