Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

1η Εργασία

Ημ/νια Παράδοσης: 12/5/2005

Μέχρι την προκαθορισμένη ημ/νία, πρέπει να παραδώσετε τις απαντήσεις σας στο γραμματοκιβώτιο του διδάσκοντα, στον 1ο όροφο του κτιρίου Λυμπέρη.

Οι εργασίες είναι **ατομικές**. Αν συνεργαστήκατε με κάποιους συμφοιτητές σας στην επίλυση των εργασιών, πρέπει να αναφέρετε τα ονόματά τους. Επίσης πρέπει να αναφέρετε όποιες πηγές (άλλες από το βιβλίο του Liu και τις σημειώσεις του διδάσκοντα) χρησιμοποιήσατε κατά την επίλυση των ασκήσεων. Αν βρήκατε τη λύση από κάποιο βιβλίο ή σε συνεργασία με κάποιο συμφοιτητή σας, θα πρέπει να τη διατυπώσετε με "δικά σας λόγια", ειδάλλως δεν θα γίνει δεκτή.

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις τεκμηριώνοντας πλήρως τις απαντήσεις σας. Κάθε άσκηση αντιστοιχεί σε 2.5 μονάδες. Χρειάζονται 4 σωστές απαντήσεις για το άριστα. Οι υπόλοιπες σωστές απαντήσεις λειτουργούν σαν bonus και βελτιώνουν τη βαθμολογία σας (εφόσον επιτύχετε στις τελικές εξετάσεις).

Άσκηση 1. Να αποδείξετε ότι οι κορυφές κάθε απλού επίπεδου γραφήματος $G(V, E)$ μπορούν να διαμεριστούν[1] σε τρία σύνολα ώστε τα αντίστοιχα επαγώμενα υπογραφήματα[2] να είναι άκυκλα (δηλ. να μην περιέχουν κύκλο).

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι κάθε απλό επίπεδο γράφημα έχει κορυφή βαθμού το πολύ 5.

Άσκηση 2. Ένα γράφημα λέγεται *εξωτερικά επίπεδο* (outerplanar) αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται και όλες οι κορυφές του να βρίσκονται στην εξωτερική όψη. Να αποδείξετε ότι κάθε απλό εξωτερικά επίπεδο γράφημα με n κορυφές έχει το πολύ $2n-3$ ακμές.

Υπόδειξη: Ο ελάχιστος αριθμός ακμών κάθε *εσωτερικής* όψης είναι 3 (επειδή το γράφημα είναι απλό). Υπολογίστε ένα άνω φράγμα στον αριθμό των όψεων συναρτήσει του αριθμού των κορυφών και του αριθμού των ακμών.

Άσκηση 3. Ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης ονομάζεται AVL-δέντρο όταν τα ύψη των δύο υποδέντρων (με ρίζες τα παιδιά) κάθε εσωτερικής κορυφής διαφέρουν το πολύ κατά 1. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των κορυφών n ενός AVL-δέντρου με ύψος h επαληθεύει την ανισότητα: $F_{h+1} \leq n \leq 2^{h+1} - 1$, όπου F_{h+1} είναι ο $(h+1)$-οστός όρος της ακολουθίας Fibonacci[3].

Άσκηση 4. Να λύσετε την άσκηση 6.22, σελ. 273, από το βιβλίο "Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών" του C.L. Liu.

Υπόδειξη για (γ) και (δ): Ουσιαστικά ζητείται να αποδείξετε ότι η απεικόνιση των δέντρων με n κορυφές (διαφορετικών ονομάτων) στις συμβολοσειρές μήκους $n-2$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Χρησιμοποιείστε μαθηματική επαγωγή. Στο (γ),

---

[1] Τα υποσύνολα $X_1, \ldots, X_k$ αποτελούν μια *διαμέριση* του συνόλου X όταν είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο ($\forall i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$) και η ένωσή τους είναι το X ($\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$).

[2] Το επαγώμενο υπογράφημα του G με σύνολο κορυφών V' αποτελείται από τις κορυφές του V' και *όλες* τις ακμές του G που συνδέουν κορυφές του V'.

[3] Η ακολουθία Fibonacci έχει πρώτους όρους $F_1 = F_2 = 1$ και ορίζεται από αναδρομική σχέση $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 3$.

δείξετε ότι κάθε συμβολοσειρά αντιστοιχεί σε ένα δέντρο (άρα η αντιστοιχία είναι επί). Η επαγωγική απόδειξη είναι κατασκευαστική και οδηγεί σε αναδρομικό αλγόριθμο. Στο (δ), δείξετε ότι δεν υπάρχουν δύο ίδια δέντρα που αντιστοιχούν στην ίδια συμβολοσειρά (άρα η αντιστοιχία είναι $1-1$).

Άσκηση 5. Έστω απλό διμερές γράφημα με τον ίδιο αριθμό κορυφών σε κάθε μέρος. Αν το διμερές γράφημα είναι k-κανονικό (δηλαδή κάθε κορυφή του έχει βαθμό k), να αποδείξετε ότι οι ακμές του γραφήματος μπορούν να διαμεριστούν σε k πλήρη ταιριάσματα.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Hall, να αποδείξετε ότι κάθε κανονικό διμερές γράφημα με ίδιο αριθμό κορυφών στα δύο μέρη περιέχει ένα πλήρες ταίριασμα. Τι συμβαίνει αν αφαιρέσετε αυτό το ταίριασμα;

Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι κάθε γράφημα με μέγιστο βαθμό Δ μπορεί να χρωματιστεί με $\Delta+1$ το πολύ χρώματα. Δώστε ένα παράδειγμα γραφήματος που χρειάζεται ακριβώς $\Delta + 1$ χρώματα.