Συνδυαστική Απαρίθμηση

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συνδυαστική Απαρίθμηση

- Υπολογισμός (με συνδυαστικά επιχειρήματα) του πλήθους των διαφορετικών αποτελεσμάτων ενός «πειράματος».
  - «Πείραμα»: διαδικασία με συγκεκριμένο (πεπερασμένο) σύνολο παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.
    - Π.χ. ρίψη ζαριών, μοίρασμα τράπουλας, ανάθεση γραφείων, επιλογή password, 6άδες Lotto, …
  - Πληθάριθμος δυναμοσυνόλου: αν $|A| = n$, τότε $|P(A)| = 2^n$
- Βασικές αρχές και έννοιες:
  - Κανόνες γινομένου και αθροίσματος, αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού.
  - Διατάξεις και μεταθέσεις (με ή χωρίς) επανάληψη.
  - Συνδυασμοί (με ή χωρίς) επανάληψη.

Κανόνας Γινομένου

- Πείραμα Α με n αποτελέσματα. Πείραμα Β με m αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα Α και Β είναι **ανεξάρτητα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων Α **και** Β έχει $n \times m$ αποτελέσματα.
  - Ανεξάρτητα: το αποτέλεσμα του Α δεν επηρεάζει (ως προς τον αριθμό των αποτελεσμάτων) το αποτέλεσμα του Β, και αντίστροφα.
    - Π.χ. $|A \times B| = |A| \times |B|$
  - Επιλογή ενός ψηφίου 0-9 και ενός κεφαλαίου Ελληνικού γράμματος:
    - $10 \times 24 = 240$ διαφορετικά αποτελέσματα.
  - #συμβ/ρών (με κεφαλαία Ελληνικά) μήκους 10: 24^{10}
  - #παλινδρομικών συμβ/ρών μήκους 10: 24^5
  - #συναρτήσεων από Α στο Β ($|A| = n$, $|B| = m$): m^n
  - #συναρτήσεων **1-1** από Α στο Β ($m \geq n$): $m(m-1)\cdots(m-n+1)$

Κανόνας Αθροίσματος

- Πείραμα A με n αποτελέσματα. Πείραμα B με m αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα A και B είναι **αμοιβαία αποκλειόμενα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων A **ή** B έχει n+m αποτελέσματα.
  - Αμοιβαία αποκλειόμενα: η παρατήρηση αποτελέσματος του A αποκλείει την παρατήρηση αποτελέσματος του B, και αντίστροφα.
  - $|A \cup B| = |A| + |B|$, αν $|A \cap B| = \emptyset$
  - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία.
  - Τρόποι να διαλέξουμε 2 βιβλία σε διαφορετική γλώσσα:
    - Ελλ. – Αγγλ.: $5 \times 7 = 35$
    - Ελλ. – Γερμ.: $5 \times 10 = 50$
    - Αγγλ. – Γερμ.: $7 \times 10 = 70$
  - Αμοιβαία αποκλειόμενα. Σύνολο: 155 διαφορετικές επιλογές.
  - Τρόποι να διαλέξουμε 2 βιβλία:

Παραδείγματα

- #passwords με 6 – 8 χαρακτήρες αποτελούμενα από κεφαλαία (Αγγλικά) γράμματα και (τουλάχιστον ένα) δεκαδικό ψηφίο.
  - #passwords μήκους k = $36^k - 26^k$
  - #passwords = $(36^6+36^7+36^8) - (26^6+26^7+26^8)$
- #passwords μήκους 2 από A, B, C, D και 0, 1, 2 με τουλάχιστον ένα ψηφίο.
  - Σωστό το $7^2 - 4^2 = 33$. **Λάθος** το (γιατί;) $2\times3\times7 = 42$
- #δυαδικών συμβ/ρών μήκους 8 που είτε αρχίζουν από 1 είτε τελειώνουν σε 00:
  - Όχι αμοιβαία αποκλειόμενα: $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$.

Διατάξεις – Μεταθέσεις

- **Διατάξεις** P(n, k): k από n διακεκριμένα αντικείμενα σε k διακεκριμένες θέσεις (1 αντικείμενο σε κάθε θέση).
  - P(n, k) = #τρόπων να πληρωθούν k διακεκριμένες θέσεις από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).
    $$P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
  - #τρόπων να πληρώσουμε 4 (διαφορετικές) θέσεις εργασίας αν έχουμε 30 υποψήφιους: $P(30,4) = 30!/26!$
  - #συμβ/ρών μήκους 10 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες: $P(24,10) = 24!/14!$
- **Μεταθέσεις** n αντικειμένων: P(n, n) = n!
  - #αναθέσεων 10 (διαφορετικών) γραφείων σε 10 καθηγητές:
  - #συμβ/ρών μήκους 24 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες:

Παραδείγματα

- #συμβ/ρών από 4 διαφορετικούς χαρακτήρες ακολουθούμενους από 3 διαφορετικά ψηφία:
  - $P(24, 4) \times P(10, 3)$
- #τετραψήφιων δεκαδικών αριθμών που δεν αρχίζουν από 0 και δεν έχουν επαναλαμβανόμενα ψηφία:
  - $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.
- #μεταθέσεων (κεφαλαίων Ελληνικών) όπου Α εμφανίζεται πριν από τα Β και Γ:
  - $P(24, 21) \times 2!$
- #μεταθέσεων όπου Α εμφανίζεται πριν το Β, και μετά από τα Γ και Δ:
  - $P(24, 20) \times 2!$

Διατάξεις με Επανάληψη

- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών: 10^5
- Διατάξεις με **επανάληψη**: n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε απεριόριστα «αντίγραφα») σε k διακεκριμένες θέσεις: n^k
  - Διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα), όταν η σειρά στις υποδοχές δεν έχει σημασία.
- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών με τουλ. ένα 8: $10^5 - 9^5$
- Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου A: $2^{|A|}$
  - |A| στοιχεία σε 2 υποδοχές (ανήκει – δεν ανήκει στο υποσύνολο).
- #δυαδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος από 1: 2^{n-1}
  - $\forall$ συμβ/ρά μήκους n–1, $\exists$ μοναδική συμ/ρά με άρτιο πλήθος 1.
  - Ιδέα του parity bit.

Διατάξεις με Επανάληψη

- Διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό χωρητικότητας) με σειρά στις υποδοχές να έχει σημασία.
  - Ιστιοφόρο έχει n κατάρτια στα οποία μπορεί να αναρτηθούν k διαφορετικές σημαίες. Πόσα διαφορετικά σήματα;

$$n(n+1)\cdots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

- Κυκλικές μεταθέσεις n ατόμων: $(n-1)!$
  - #τρόπων που n άνθρωποι κάθονται σε κυκλικό τραπέζι (διακρίνουμε μεταξύ δεξιά και αριστερά).

Συνδυασμοί

- **Συνδυασμοί** C(n, k): #επιλογών k από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = C(n,n-k)$$

  - Διαφορετικές 6άδες Lotto (από 1-49): $C(49,6)$
  - #υποσυνόλων με k στοιχεία από σύνολο n στοιχείων: $C(n,k)$
  - #τρόπων στελέχωσης 5μελούς κοινοβουλευτικής επιτροπής, όπου μέλη ισότιμα: $C(300,5)$
  - #δυαδικών συμβ/ρών μήκους 32 με (ακριβώς) επτά 1: $C(32,7)$
- #επιλογών 3 αριθμών 1-300 ώστε άθροισμα να διαιρείται από 3.
  - Αριθμοί 1-300 σε 3 ομάδες 100 αριθμών με βάση mod 3.
  - Είτε 3 από ίδια ομάδα είτε έναν από κάθε ομάδα.
  - Τελικά $3C(100, 3) + 100^3 = 1.485.100$

Μεταθέσεις με Ομάδες

- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέξης ΕΦΗΒΙΚΟΣ: 8!
- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέξης ΠΑΡΑΠΟΝΑ:
  - Μεταθέσεις με ομάδες ίδιων αντικειμένων: 8!/(2!3!1!1!1!)
- Μεταθέσεις n αντικειμένων σε k ομάδες ίδιων αντικειμένων με πληθάριθμο n_1, n_2, …, n_k αντίστοιχα:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-(n_1+n_2)}{n_3}\cdots\binom{n-\sum_{i=1}^{k-1}n_i}{n_k}$$

- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ: $24!/(7!8!5!4!)$
  - Αν πρώτο και τελευταίο Α: $22!/(5!8!5!4!)$
  - Αν δεν πρέπει να εμφανίζεται ΔΔΔΔ: $24!/(7!8!5!4!) - 21!/(7!8!5!1!)$

Παραδείγματα

- Έστω το «τετράγωνο» που ορίζεται από τα σημεία (0, 0), (0, 8), (10, 0), και (10, 8).
- Πόσα διαφορετικά «μονοπάτια» από το (0, 0) στο (10, 8), αν σε κάθε βήμα μετακινούμαστε είτε κατά μια μονάδα προς τα πάνω είτε κατά μια μονάδα προς τα δεξιά.
  - Πρέπει να κάνουμε 8 βήματα **Π**άνω και 10 βήματα **Δ**εξιά.
  - #μονοπατιών = #μεταθέσεων 8 Π και 10 Δ = 18!/(10! 8!)
- Ακολουθίες $a_1, \ldots, a_n$ και $\beta_1, \ldots, \beta_m$. #τρόπων καταγραφής στοιχείων των 2 ακολουθιών ώστε να διατηρείται η σειρά μεταξύ των στοιχείων της ίδιας ακολουθίας;
  - Μεταθέσεις n Α και m Β δείχνουν θέσεις στοιχείων κάθε ακολουθίας.
  - Δεδομένη η σειρά των στοιχείων κάθε ακολουθίας.
  - Τελικά: $(n+m)!/(n!\, m!)$.

Συνδυασμοί με Επανάληψη

- Διαφορετικά αποτελέσματα από ρίψη 2 (ίδιων) ζαριών: 21
- Συνδυασμοί με **επανάληψη**: k από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε απεριόριστα «αντίγραφα»).
  - Διανομή k ίδιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα).

$$C(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

  - Διανομές αντιστοιχούν σε μεταθέσεις k 1 και n-1 0. #1 ανάμεσα σε 0 καθορίζει #αντικειμένων σε κάθε υποδοχή.
- #διανομών k ίδιων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές ώστε καμία υποδοχή κενή (k ≥ n).
  - C(n + (k – n) – 1, k – n) = C(k – 1, k – n) = C(k – 1, n – 1)

Ανακεφαλαίωση

Προβλήματα Διατάξεων

Προβλήματα Συνδυασμών

n διακεκριμένα αντικείμενα

σε *k* διακεκριμένες θέσεις

επιλογή *k* από τα *n* αντικείμενα, κάθε επιλογή είναι «διαφορετική»

σε *k* **μη** διακεκριμένες θέσεις

επιλογή *k* από τα *n* αντικείμενα, οι επιλογές είναι «ίδιες»

χωρίς επανάληψη (κάθε αντικείμενο διαθέσιμο σε 1 «αντίγραφο»)

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

με επανάληψη (κάθε αντικείμενο διαθέσιμο σε πολλά «αντίγραφα»)

Ισοδύναμο με διανομή *k* διακεκριμένων αντικειμένων σε *n* διακεκριμένες υποδοχές

δεν παίζει ρόλο η **σειρά στις υποδοχές**

$$n^k$$

παίζει ρόλο η **σειρά στις υποδοχές**

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

με επανάληψη (κάθε αντικείμενο διαθέσιμο σε πολλά «αντίγραφα»)

Ισοδύναμο με διανομή *k* μη διακεκριμένων αντικειμένων σε *n* διακεκριμένες υποδοχές

$$C(n+k-1,k)=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$$

χωρίς επανάληψη (κάθε αντικείμενο διαθέσιμο σε 1 «αντίγραφο»)

$$C(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Μεταθέσεις ($n=k$): $P(n,n)=n!$

Μεταθέσεις *n* αντικειμένων όταν έχουμε *k* **ομάδες** ίδιων αντικ. με πληθάριθμο $n_1, \ldots, n_k$: $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

Παραδείγματα

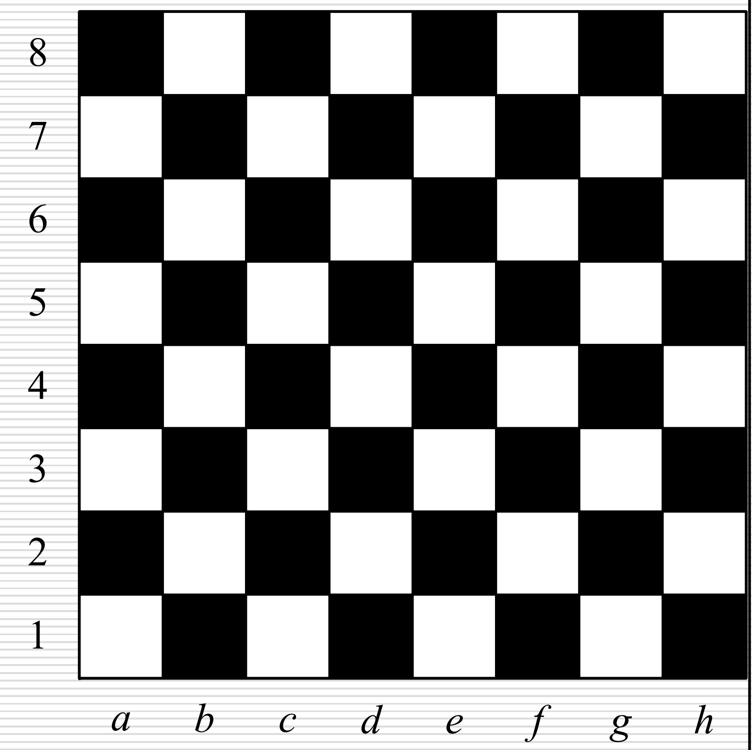
- 10 όμοιες καραμέλες σε 3 διακεκριμένα παιδιά: $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$
- Επιλογή 10 από 12 παιδιά (σειρά επιλογής έχει σημασία): $P(12,10) = \frac{12!}{2!}$
- Επιλογή 10 από 12 παιδιά (σειρά επιλογής δεν έχει σημασία): $C(12,10) = \binom{12}{10}$
- Επιλογή 10 από 3 χρώματα με επανάληψη (σειρά επιλογής δεν έχει σημασία): $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$
- Επιλογή 3 από 10 χρώματα με επανάληψη (σειρά επιλογής δεν έχει σημασία): $\binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$

Παραδείγματα

- #διμελών σχέσεων στο σύνολο Α, |Α| = n:
  - Όλες: 2^{n^2}
  - Ανακλαστικές: $2^{n(n-1)}$
  - Συμμετρικές: $2^{n(n+1)/2}$
  - Αντισυμμετρικές: $2^n \times 3^{n(n-1)/2}$

Παραδείγματα

- #τοποθέτησης 8 (ίδιων / διακεκριμένων) πύργων σε μια σκακιέρα 8x8, ώστε να μην απειλεί ο ένας τον άλλο.
  - Ένας πύργος σε κάθε γραμμή.
    Ο πύργος της $1^{ης}$ γραμμής με 8 τρόπους, ο πύργος της $2^{ης}$ γραμμής με 7 τρόπους, κοκ.
  - Αν πύργοι ίδιοι, συνολικά: 8! τρόποι.
  - Αν πύργοι διακεκριμένοι: πολλαπλασιάζουμε με μεταθέσεις: 8!.
    - Συνολικά: $(8!)^2$ τρόποι.



Παραδείγματα

- 40 βουλευτές του κόμματος Α, 35 βουλευτές του κόμματος Β, και 25 βουλευτές του κόμματος Γ.
- #τρόπων να ορίσουμε 10 (μη διακεκριμένες) 3μελείς κοινοβουλευτικές ομάδες, με έναν βουλευτή από κάθε κόμμα, αν κάθε βουλευτής μπορεί να συμμετέχει σε 1 το πολύ ομάδα;
  - #τρόποι επιλογής 10 βουλευτών κόμματος Α: C(40, 10).
  - #τρόποι επιλογής και «τοποθέτησης» 10 βουλ. Β: P(35, 10).
  - #τρόποι επιλογής και «τοποθέτησης» 10 βουλ. Γ: P(25, 10).
  - #τρόπων συνολικά: 40!35!25!/(10!30!25!15!).

Παραδείγματα

- #ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$
  - Αν $x_i \geq 0$: C(20 + 4 - 1, 20) = C(23, 20) = C(23, 3)
  - Αν $x_i \geq 1$: C(16 + 4 - 1, 16) = C(19, 16) = C(19, 3)
  - Αν $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 4$, $x_3 \geq 1$, $x_4 \geq 5$: C(8 + 4 - 1, 8) = C(11, 3)
- 5 διαφορετικά γράμματα (π.χ. Α, Β, Γ, Δ, Ε) και 20 κενά _ . #συμβ/ρών που αρχίζουν και τελειώνουν με γράμμα και έχουν ανάμεσα σε διαδοχικά γράμματα τουλάχιστον 3 κενά.
  - Μεταθέσεις 5 γραμμάτων: 5!
  - 12 κενά στις 4 διακεκριμένες «υποδοχές» ανάμεσα σε γράμματα.
  - Υπόλοιπα 8 κενά στις 4 «υποδοχές» με C(4 + 8 – 1, 8) τρόπους.
  - Τελικά: C(11, 8) 5! συμβ/ρές.

Παραδείγματα

- n θρανία στη σειρά για k φοιτητές που εξετάζονται ($n \geq 2k-1$). #τοποθετήσεων ώστε τουλάχιστον μια κενή θέση ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών.
  - Μεταθέσεις k φοιτητών: $k!$ (καταλαμβάνουν k θρανία).
  - Τοποθετούμε $k-1$ θρανία ανάμεσά τους.
  - Υπόλοιπα $n-2k+1$ (ίδια) θρανία στις $k+1$ διακεκριμένες «υποδοχές» στην αρχή, στο τέλος, και ανάμεσα σε φοιτητές.
    - $C((k+1) + (n-2k+1) - 1, n-2k+1) = C(n-k+1, n-2k+1)$
      $= C(n-k+1, k)$
  - Τελικά $C(n-k+1, k)\, k! = (n-k+1)!/(n-2k+1)!$
  - Διαφορετικά μεταθέσεις (με ομάδες) k διαφορετικών αντικειμένων (φοιτητών) και $n-2k+1$ ίδιων αντικειμένων (ελεύθερων θρανίων).

Παραδείγματα

- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ όπου δεν εμφανίζεται το ΓΑ.
  - #συμβ/ρών μήκους 19 από 7 Α, 8 Β, και 4 Δ: 19!/(7!8!4!)
  - Δημιουργούνται 20 διακεκριμένες «υποδοχές» για τα 5 Γ.
  - Εξαιρούνται οι 7 πριν από κάθε Α.
  - Διανομή 5 Γ σε 13 διακεκριμένες «υποδοχές»: C(17, 5).
  - Τελικά: [19!/(7!8!4!)]×[17!/(5!12!)].
- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ όπου το πρώτο Β εμφανίζεται **πριν** το πρώτο Α.
  - #επιλογών θέσεων για 4 Δ (από 24): C(24, 4).
  - #επιλογών θέσεων για 5 Γ (από 20): C(20, 5).
  - Ένα Β σε πρώτη διαθέσιμη θέση.
  - #επιλογών θέσεων για υπόλοιπα 7 Β (από 14): C(14, 7).
  - Συνολικά: [24!/(4!5!15!)]×[14!/(7!7!)].

Παραδείγματα

- #διανομών 22 διαφορ. βιβλίων πάχους 5 εκ. σε 3 διακεκριμένα ράφια μήκους 1 μ. το καθένα ώστε κανένα ράφι κενό.
  - k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές ώστε καμία υποδοχή κενή ($k \geq n$, πάχος βιβλίων δεν συνιστά περιορισμό).
  - Αν αντικείμενα ίδια, #διανομών: $C(k - 1, n - 1)$.
  - Αντικείμενα διαφορετικά: $C(k - 1, n - 1) \times k!$

Παραδείγματα

- Πόσα υποσύνολα 4 στοιχείων του A = {1, ..., 15} **δεν** περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς;
  - Υποσύνολο ως 4άδα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ όπου $1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 \le 15$
  - 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τέτοιων 4άδων $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ και λύσεων της εξίσωσης $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5=14$ στους φυσικούς με $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \ge 1$:

$$1+\beta_1=\alpha_1 \qquad \alpha_1+\beta_2=\alpha_2$$
$$\alpha_2+\beta_3=\alpha_3 \qquad \alpha_3+\beta_4=\alpha_4$$
$$\alpha_4+\beta_5=15$$

  - Για να μην είναι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ διαδοχικοί, πρέπει $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \ge 2$.
  - Διανομή 14 ίδιων μπαλών σε 5 διαφορετικές υποδοχές, ώστε υποδοχές 2, 3, και 4 να έχουν τουλάχιστον 2 μπάλες.
  - Αποτέλεσμα: C(12, 8) = C(12, 4) = 495.
- Να γενικεύσετε για #υποσυνόλων k στοιχείων του {1, …, n} που δεν περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς.

Παραδείγματα

- 2n+1 κοινοβουλευτικές έδρες να μοιραστούν σε 3 κόμματα ώστε αν οποιαδήποτε 2 συμφωνούν να έχουν πλειοψηφία.
  - #διανομών 2n+1 (ίδιες) μπάλες σε 3 διακεκριμένες υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή ≤ n μπάλες.
  - #διανομών χωρίς περιορισμούς: $\binom{2n+1+3-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2n+1} = \binom{2n+3}{2}$
  - #διανομών όπου κάποια υποδοχή έχει ≥ n+1 μπάλες:
    - Επιλέγουμε (με 3 τρόπους) υποδοχή με «πλειοψηφία».
    - Τοποθετούμε σε αυτή n+1 μπάλες.
    - #διανομών υπόλοιπων n μπαλών στις 3 υποδοχές:

$$\binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2}$$

  - Τελικά #διανομών: $\binom{2n+3}{2} - 3\binom{n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Διατάξεις με Επανάληψη

- #εβδομαδιαίων προγραμμάτων μελέτης για μαθήματα Μ, Φ, Χ, Ο ώστε κάθε μάθημα τουλάχιστον 1 ημέρα.
  - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $4^7 - |\overline{\mathbf{M}} \cup \overline{\mathbf{\Phi}} \cup \overline{\mathbf{X}} \cup \overline{\mathbf{O}}|$
    - #προγραμμάτων χωρίς (τουλ.) 1 μάθημα: 3^7 (4 περιπτώσεις).
    - #προγραμμάτων χωρίς (τουλ.) 2 μαθήματα: 2^7 (6 περιπτώσεις).
    - #προγραμμάτων χωρίς (τουλ.) 3 μαθήματα: $1^7 = 1$ (4 περιπτ.)
    - #προγραμμάτων χωρίς (τουλ.) 4 μαθήματα: 0
  - Τελικά: $4^7 - 4 \times 3^7 + 6 \times 2^7 - 4 = 8400$

Υποσύνολα Πολυσυνόλου

- #διαιρετών του 180;
  - Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $180 = 2^2\, 3^2\, 5$.
  - #διαιρετών 180 = #υποσυνόλων {2:2, 3:2, 5:1}
  - #διαιρετών του 180 = $3\times 3\times 2 = 18$.
- #υποσύνολων πολυσυνόλου με k στοιχεία όπου κάθε στοιχείο p είναι διαθέσιμο σε n_p «αντίγραφα».
  - $(1+n_1)(1+n_2) \ldots (1+n_k)$
  - Για #μη κενών υποσυνόλων: $(1+n_1)(1+n_2) \ldots (1+n_k) - 1$
- #διαιρετών του 1400;
  - Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $1400 = 2^3\, 5^2\, 7$.
  - #διαιρετών 1400 = #υποσυνόλων {2:3, 5:2, 7:1}
  - #διαιρετών του 1400 = $4\times 3\times 2 = 24$.

Εφαρμογή: Διακριτή Πιθανότητα

- Διακριτός δειγματοχώρος: αριθμήσιμο σύνολο Ω, όπου $\forall \omega \in \Omega$, αντιστοιχούμε $p(\omega) \in [0, 1]$ και $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
  - Γεγονός Ε: υποσύνολο Ω.
  - p(E) = $\sum_{\omega \in E} p(\omega)$
  - Πιθανότητα για 6άρες στο τάβλι:
    - 1/36.
  - Πιθανότητα για 6-5 στο τάβλι:
    - 2/36.
  - Πιθανότητα για ίδιο αποτέλεσμα στα 2 ζάρια:
    - 6*1/36 = 1/6.
- Πιθανότητα τουλάχιστον 2 από k (τυχαία επιλεγμένους) ανθρώπους να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα;

Εφαρμογή: Διακριτή Πιθανότητα

- Ρίχνουμε 4 (ίδια / διακ.) ζάρια. Πιθανότητα κανένα να μην φέρει 6;
  - Αφού η πιθανότητα δεν σχετίζεται με «ταυτότητα» ζαριών, δεν παίζει ρόλο αν τα ζάρια είναι διακεκριμένα ή όχι.
  - Τα θεωρούμε διακεκριμένα, ώστε όλα τα ενδεχόμενα **ισοπίθανα**.
  - Όλα τα ενδεχόμενα: $6^4 = 1296$.
    Ενδεχόμενα χωρίς 6: $5^4 = 625$.
    Ενδεχόμενα με τουλάχιστον ένα 6: $1296 - 625 = 671$.
- Έχουμε 10 ζευγάρια παπούτσια ανακατεμένα σε ένα ντουλάπι. Επιλέγουμε τυχαία 8 παπούτσια από το ντουλάπι.
  - Ποια η πιθανότητα να μην επιλέξουμε **κανένα** ζευγάρι παπουτσιών;
  - Ποια η πιθανότητα να επιλέξουμε ακριβώς **ένα** ζευγάρι παπουτσιών;

Δυωνυμικοί Συντελεστές

- Δυωνυμικό Θεώρημα: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^{n-k} y^k$
- Ως άμεση συνέπεια: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
  - Προκύπτει συνδυαστικά ως #υποσυνόλων συνόλου με n στοιχεία.
  - Με x = 1 και y = −1:

    $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

  - Απόδειξη για τύπο εγκλεισμού – αποκλεισμού: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = 1$
  - Για x = 2 και y = 1: $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$

Ταυτότητα του Pascal

- Ταυτότητα του Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
  - #τρόπων να επιλέξουμε k από n αντικείμενα:
    - είτε επιλέγουμε το τελευταίο και επιλέγουμε τα άλλα k–1 από τα υπόλοιπα n-1 αντικείμενα,
    - είτε δεν επιλέγουμε το τελευταίο και επιλέγουμε όλα τα k από τα υπόλοιπα n-1 αντικείμενα.

Τρίγωνο του Pascal

- Αναδρομική σχέση για υπολογισμό δυωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

- Η τεχνική σήμερα είναι γνωστή ως **δυναμικός προγραμματισμός.**

n										
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Ταυτότητα Vandermonde

- Ταυτότητα Vandermonde: $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$
  - #τρόπων να επιλέξουμε r από n (αριθμημένες) πράσινες μπάλες και m (αριθμημένες) κόκκινες μπάλες:
    - Επιλέγουμε r – k από m κόκκινες k από n πράσινες με C(m, r – k) × C(n, k) τρόπους.
    - Αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα για διαφορετικές τιμές του k.
- Άμεση συνέπεια: $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Δημιουργία Μεταθέσεων

- ... n αντικειμένων σε λεξικογραφική σειρά.
  - Συνάρτηση που επιστρέφει (λεξικογραφικά) επόμενη μετάθεση.
  - Ελάχιστη: αντικείμενα σε αύξουσα σειρά.
  - Μέγιστη: αντικείμενα σε φθίνουσα σειρά.
- Δεδομένης μετάθεσης $a_1 a_2 \ldots a_n$:
  - Υπολόγισε ελάχιστη δυνατή κατάληξη που επιδέχεται (λεξικογραφικής) αύξησης.
  - Υπολογισμός επόμενης μετάθεσης (που δεν έχει εμφανιστεί ήδη ως κατάληξη) για αυτή την κατάληξη.

1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 2 4
1 3 4 2
1 4 2 3
1 4 3 2
2 1 3 4
2 1 4 3
2 3 1 4
2 3 4 1
2 4 1 3
2 4 3 1
3 1 2 4

4 3 2 1

Δημιουργία Μεταθέσεων

- Δεδομένης μετάθεσης $a_1 a_2 \ldots a_n$:
  - Μέγιστος δείκτης j τ.ω. $a_j < a_{j+1}$ (άρα $a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots a_{n-1} > a_n$)
- Επόμενη μετάθεση $a'_1 a'_2 \ldots a'_n$:
  - Πρόθεμα $a_1 \ldots a_{j-1}$ αμετάβλητο.
  - a'_j = ελάχιστο από τα $a_{j+1}, \ldots, a_n$ που «ξεπερνά» το a_j.
  - Υπόλοιπα από τα $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n$ (εκτός αυτού που πήρε θέση j) σε αύξουσα σειρά.
  - $36\mathbf{2}541 \rightarrow 364125$
  - $\mathbf{4}8765321 \rightarrow 51234678$

1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 2 4
1 3 4 2
1 4 2 3
1 4 3 2
2 1 3 4
2 1 4 3
2 3 1 4
2 3 4 1
2 4 1 3
2 4 3 1
3 1 2 4
3 1 4 2
3 2 1 4
3 2 4 1
3 4 1 2
3 4 2 1
4 1 2 3
4 1 3 2
4 2 1 3
4 2 3 1
4 3 1 2
4 3 2 1

Δημιουργία Μεταθέσεων

- Υλοποίηση:
  - Μέγιστο j τ.ω. $a_j < a_{j+1}$.
  - Ισχύει ότι $a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots > a_n$.
  - Μετά την αντιμετάθεση των a_j και a_k, τα $a_{j+1}, \ldots, a_n$ είναι ταξινομημένα σε φθίνουσα σειρά.
  - Αντιμετάθεση ζευγών (a_{j+1}, a_n), (a_{j+2}, a_{n-1}), κοκ. καταλήγει σε ταξινόμηση σε αύξουσα σειρά.
- Υλοποίηση χωρίς ταξινόμηση σε χρόνο O(n).

NextPermutation$(a_1 a_2 \ldots a_n)$
/* $a_1 a_2 \ldots a_n$ όχι τελευταία */
    $j := n - 1;$
    while $a_j > a_{j+1}$ **do**
        $j := j - 1;$
    $k := n;$
    while $a_j > a_k$ **do**
        $k := k - 1;$
    swap(a_j, a_k);
    $r := n; \quad s := j + 1;$
    while $r > s$ **do**
        swap(a_r, a_s);
        $r := r - 1; \quad s := s + 1;$

Δημιουργία Συνδυασμών

- Όλοι οι (2^n) συνδυασμοί n αντικειμένων: δημιουργία δυαδικών αριθμών μήκους n.
- Δημιουργία όλων των συνδυασμών k αντικειμένων από n σε λεξικογραφική σειρά.
  - Συνάρτηση για επόμενο συνδυασμό.
  - Αντικείμενα σε αύξουσα σειρά.
  - Ελάχιστος: 1 2 ... k. Μέγιστος: (n – k +1) … n
- Δεδομένης μετάθεσης $a_1 a_2 \ldots a_n$:
  - Υπολόγισε ελάχιστη δυνατή κατάληξη που επιδέχεται αύξησης.
  - Αύξηση λαμβάνει υπόψη ότι έχουμε συνδυασμούς.

1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 4 5
1 2 4 6
1 2 5 6
1 3 4 5
1 3 4 6
1 3 5 6

3 4 5 6

Δημιουργία Συνδυασμών

- Δεδομένου συνδυασμού $a_1 a_2 \ldots a_k$:
  - Μέγιστος δείκτης j τ.ω. $a_j \neq n-k+j$ (άρα $a_{j+1} \ldots a_k$ μέγιστος συνδυασμός $k - j$ στοιχείων)
- Επόμενος συνδυασμός $a'_1\, a'_2 \ldots a'_k$:
  - Πρόθεμα $a_1 \ldots a_{j-1}$ αμετάβλητο.
  - $a'_j = a_j + 1$.
  - Τα επόμενα στοιχεία ($a_j + 2$, $a_j + 3$, ...) στις υπόλοιπες θέσεις.

1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 4 5
1 2 4 6
1 2 5 6
1 3 4 5
1 3 4 6
1 3 5 6
1 4 5 6
2 3 4 5
2 3 4 6
2 3 5 6
2 4 5 6
3 4 5 6

Δημιουργία Συνδυασμών

- Υλοποίηση σε χρόνο O(k).

Next_k-Combination$(a_1 a_2 \ldots a_k)$
/* $a_1 a_2 \ldots a_k$ όχι τελευταίος */

$$
\begin{array}{l}
\quad j := k; \\
\quad \textbf{while } a_j = n - k + j \textbf{ do} \\
\qquad j := j - 1; \\
\quad a_j := a_j + 1; \quad s := a_j + 1 \\
\quad \textbf{for } i := j + 1 \textbf{ to } k \textbf{ do} \\
\qquad a_i := s; \quad s := s + 1;
\end{array}
$$