Χρωματικός Αριθμός, Κάλυμμα Κορυφών

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**

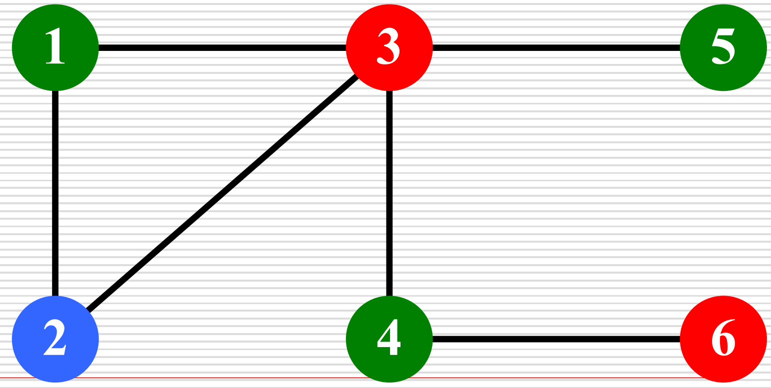
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

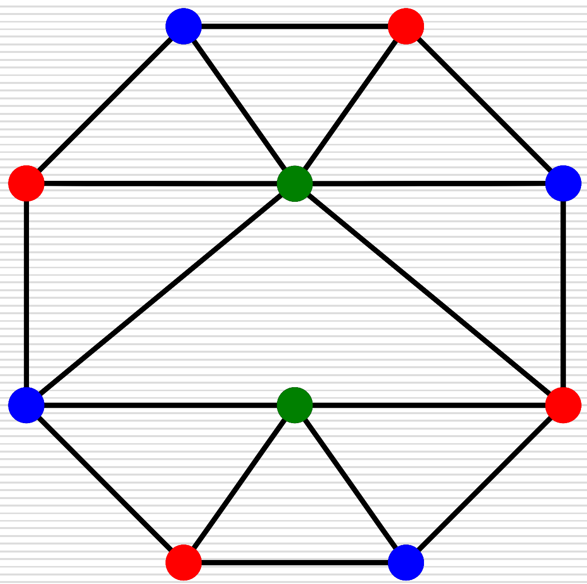
Χρωματικός Αριθμός

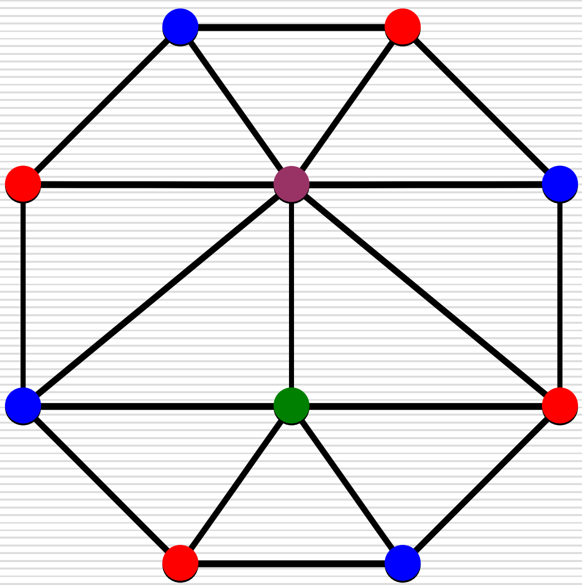
- k-μερές γράφημα: κορυφές του διαμερίζονται σε k ανεξάρτητα σύνολα.
  - Ενδιαφέρει ελάχιστο k για το οποίο γράφημα G είναι k-μερές.
  - Αυτό ταυτίζεται με χρωματικό αριθμό χ(G) γραφήματος G.
- **Χρωματικός αριθμός**: ελάχιστος αριθμός χρωμάτων για χρωματισμό κορυφών ώστε όλες οι ακμές να έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος.
  - Κορυφές ίδιου χρώματος: ανεξάρτητο σύνολο.
  - Αν G περιέχει K_m, $\chi(G) \geq m$
  - $\chi(C_n) = 2$, αν n άρτιος, και 3, αν n περιττός.
  - Επίπεδο γράφημα G, $\chi(G) \leq 4$.



Χρωματικός Αριθμός

- **Χρωματικός αριθμός**: ελάχιστος αριθμός χρωμάτων για χρωματισμό κορυφών ώστε όλες οι ακμές να έχουν άκρα διαφορετικού χρώματος.
  - Κορυφές ίδιου χρώματος: ανεξάρτητο σύνολο.



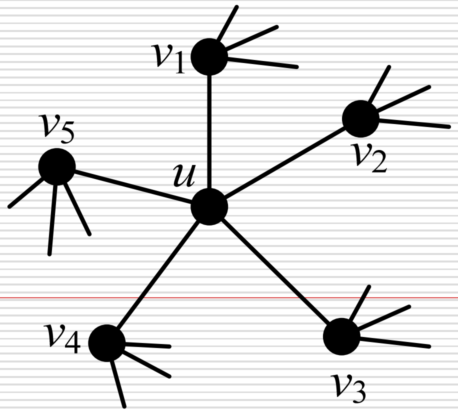


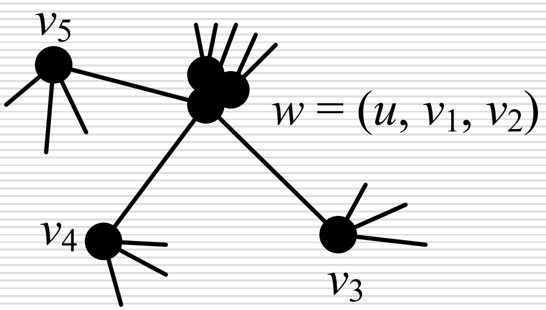
Άσκηση

- Νδο σε κάθε γράφημα G(V, E), $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$.
  - Βάση: Ισχύει για κάθε γράφημα με n = 1, 2 κορυφές.
  - Επαγωγική υπόθεση: για αυθαίρετα επιλεγμένο $n \geq 2$, ισχύει ότι $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ για κάθε γράφημα G με n κορυφές.
  - Επαγωγικό βήμα: Έστω γράφημα G′ με n+1 κορυφές. Θδο $\chi(G') \leq \Delta(G')+1$.
  - Έστω αυθαίρετη κορυφή u του G′ και $G_u = G' - u$.
  - Από επαγωγική υπόθεση: $\chi(G_u) \leq \Delta(G_u)+1 \leq \Delta(G')+1$.
  - Η κορυφή u παίρνει ένα από τα $\Delta(G')+1$ χρώματα.
  - Έγκυρος χρωματισμός γιατί $deg(u) \leq \Delta(G')$: ένα από αυτά τα χρώματα δεν χρησιμοποιείται στη γειτονιά N(u).
- Έστω συνεκτικό γράφημα G που δεν είναι πλήρες ούτε κύκλος περιττού μήκους. Τότε $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Άσκηση

- Νδο σε κάθε **επίπεδο** γράφημα G(V, E), $\chi(G) \le 5$.
  - Βάση: Ισχύει για κάθε επίπεδο γράφημα με $n = 1, 2, \ldots, 5$ κορυφές.
  - Επαγωγική υπόθεση: για αυθαίρετα επιλεγμένο $n \ge 5$, ισχύει ότι $\chi(G) \le 5$ για κάθε επίπεδο γράφημα G με n κορυφές.
  - Επαγωγικό βήμα: Επίπεδο γράφημα G′ με n+1 κορυφές: $\chi(G') \le 5$
  - Κορυφή u με βαθμό ≤ 5 και $N(u) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.
  - (Τουλ.) δύο κορυφές στο N(u) δεν συνδέονται (έστω οι v_1 και v_2).
  - G′′ (επίπεδο) γράφημα όπου {u, v1}, {u, v2} έχουν συμπτυχθεί σε w.
  - Επαγ. Υπόθ.: $\chi(G'') \le 5$ με χρώμα(w) = 1, χρώμα(v_k) = k, k = 3, 4, 5
  - Θέτουμε χρώμα(v1) = χρώμα(v2) = 1, χρώμα(u) = 2.



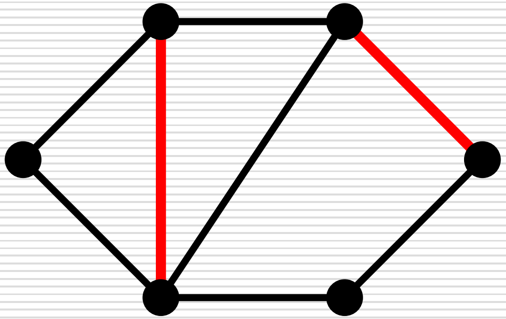


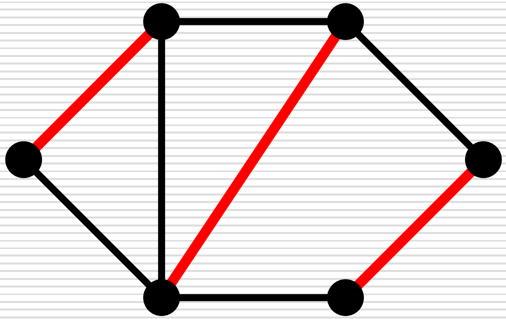
Σχέση με Ανεξάρτητα Σύνολα

- $\alpha(G)$: #κορυφών στο **μέγιστο** ανεξάρτητο σύνολο (independence number).
- Νδο σε κάθε γράφημα G, $n-\alpha(G)+1 \geq \chi(G) \geq n/\alpha(G)$
  - Χρωματίζουμε μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο με ένα χρώμα και άλλες κορυφές με διαφορετικά χρώματα: $\chi(G) \leq n-\alpha(G)+1$
  - $\alpha(G) \geq n/\chi(G)$ γιατί περισσότερες κορυφές με ίδιο χρώμα είναι τουλάχιστον τόσες.
- Νδο σε κάθε γράφημα G, $\chi(\overline{G}) \geq n/\chi(G)$.
  - Μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο I έχει τουλάχιστον $n/\chi(G)$ κορυφές.
  - Στο συμπληρωματικό γράφημα, οι κορυφές του I αποτελούν πλήρες γράφημα και χρειάζονται τουλάχιστον $n/\chi(G)$ χρώματα.

Ταιριάσματα (Matchings)

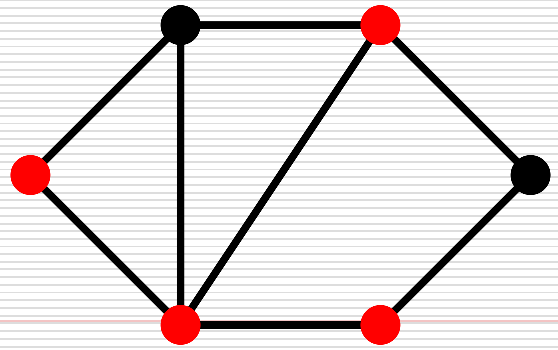
- Ταίριασμα σε γράφημα G(V, E): σύνολο ακμών $M \subseteq E$ χωρίς κοινά άκρα.
  - Κορυφή βαθμού 1 στο M: ταιριασμένη. Διαφορετικά ελεύθερη.
  - M τέλειο ταίριασμα αν όλες οι κορυφές του G ταιριασμένες.
  - M μέγιστο ταίριασμα αν για κάθε ταίριασμα M′, $|M| \geq |M'|$.
  - M μεγιστικό (maximal) αν καμία ακμή στο E δεν έχει δύο ελεύθερα άκρα.
  - M μεγιστοτικό ανν ελεύθερες κορυφές αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο.

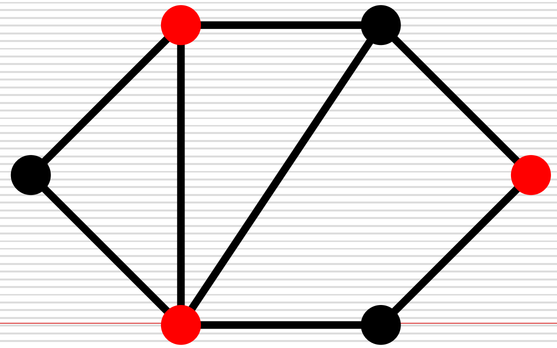




Κάλυμμα Κορυφών (Vertex Cover)

- Γράφημα G(V, E): κάλυμμα κορυφών $C \subseteq V$ αν κάθε ακμή έχει τουλάχιστον ένα από τα άκρα της στο C.
  - C κάλυμμα κορυφών ανν V \ C ανεξάρτητο σύνολο.
  - β(G): #κορυφών στο **ελάχιστο** κάλυμμα κορυφών.
    - Σε κάθε γράφημα G, β(G) + α(G) = n





Κάλυμμα Κορυφών (Vertex Cover)

- Γράφημα G(V, E): κάλυμμα κορυφών $C \subseteq V$ αν κάθε ακμή έχει τουλάχιστον ένα από τα άκρα της στο C.
  - C κάλυμμα κορυφών ανν V \ C ανεξάρτητο σύνολο.
  - β(G): #κορυφών στο **ελάχιστο** κάλυμμα κορυφών.
    - Σε κάθε γράφημα G, β(G) + α(G) = n
  - Έστω κάλυμμα κορυφών C και ταίριασμα M: $|C| \geq |M|$.
    - Αν $|C| = |M|$, το C είναι ελάχιστο κάλυμμα κορυφών και το M είναι μέγιστο ταίριασμα.