

Σχέσεις

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



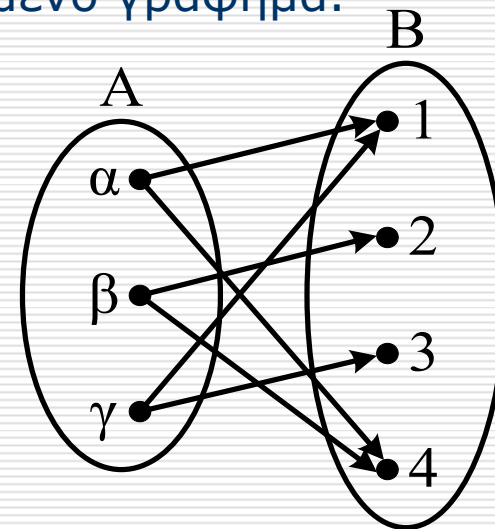
Διμελής Σχέση

- Διατεταγμένο ζεύγος (a, β) :
 - Δύο αντικείμενα (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά) σε καθορισμένη σειρά.
 - **Γενίκευση:** διατεταγμένη τριάδα (a, β, γ) , διατεταγμένη n -άδα (a_1, \dots, a_n) .
- Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$:
 - $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ και } b \in B\}$
 - **Γενίκευση:** $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$
- Διμελής σχέση R από σύνολο A σε σύνολο B : $R \subseteq A \times B$.
 - a σχετίζεται με β (στην R): $(a, \beta) \in R$.
 - $A = \{a, \beta, \gamma\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(a, 1), (a, 4), (\beta, 2), (\beta, 4), (\gamma, 1), (\gamma, 3)\}$
 - A φοιτητές, B μαθήματα, R δηλώσεις μαθημάτων.
 - A υποψήφιοι εργαζόμενοι, B εταιρείες, R αιτήσεις πρόσληψης.
- Τριμελής σχέση R : $R \subseteq A \times B \times \Gamma$.
 n -μελής σχέση R : $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

Αναπαράσταση

- Αναπαράσταση διμελούς σχέσης R :
 - **Σύνολο:** παράθεση διατεταγμένων ζευγών.
 - **Κατηγορία:** χαρακτηριστική ιδιότητα σχετιζόμενων στοιχείων.
 - **Συσχέτιση:** Boolean πίνακας, κατευθυνόμενο γράφημα.

	1	2	3	4
α	1	0	0	1
β	0	1	0	1
γ	1	0	1	0

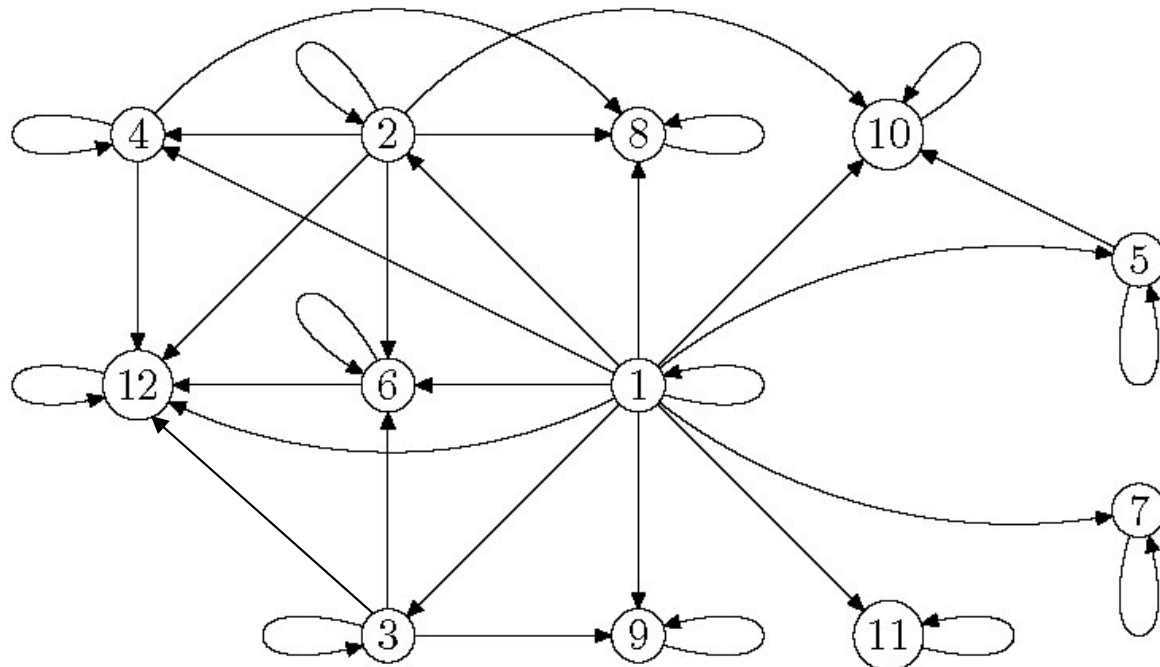


$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\}, B = \{1, 2, 3, 4\},$$

$$R = \{(\alpha, 1), (\alpha, 4), (\beta, 2), (\beta, 4), (\gamma, 1), (\gamma, 3)\}$$

Στο Ίδιο Σύνολο

- Διμελής **σχέση** R στο σύνολο A : $R \subseteq A \times A$.
 - Σχέσεις μεταξύ αριθμών ($<$, \geq , a διαιρεί β , ...), ανθρώπων, συνόλων, κλπ.
 - Γράφημα: **κορυφές** στοιχεία A , **ακμή** (a, β) δηλώνει $(a, \beta) \in R$.

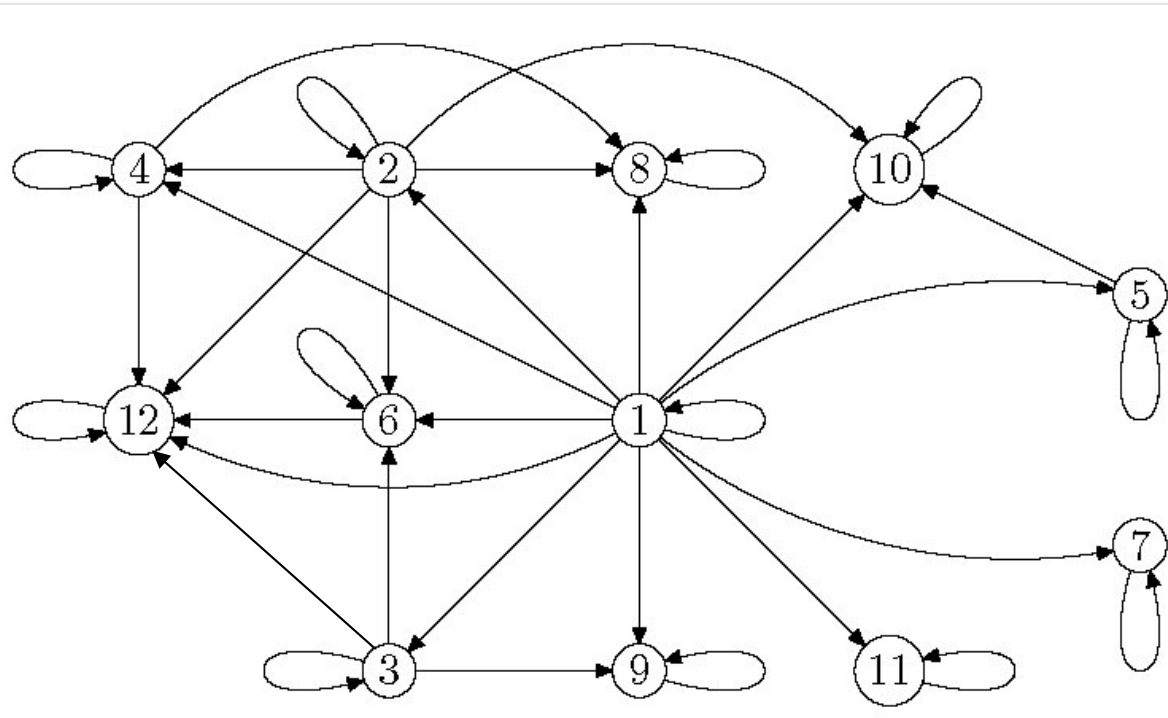


Ιδιότητες Διμελών Σχέσεων

- **Ανακλαστική:** για κάθε $a \in A$, $(a, a) \in R$.
 - Συμπληρωμένη διαγώνιος. Όλες οι κορυφές έχουν ανακύκλωση.
- **Συμμετρική:** για κάθε $(a, \beta) \in R$, έχουμε $(\beta, a) \in R$.
 - Συμμετρία ως προς διαγώνιο. Μη κατευθυνόμενο γράφημα.
- **Αντισυμμετρική:** Αν $(a, \beta), (\beta, a) \in R$, τότε $a = \beta$.
 - Εκτός διαγωνίου, ≤ 1 από κάθε ζεύγος «συμμετρικών» θέσεων.
 ≤ 1 ακμή για κάθε ζεύγος **διαφορετικών** κορυφών.
 - Υπάρχει σχέση συμμετρική και αντισυμμετρική;
- **Μεταβατική:** για κάθε $(a, \beta), (\beta, \gamma) \in R$, έχουμε $(a, \gamma) \in R$.
 - Αν υπάρχει $a - \gamma$ μονοπάτι, τότε υπάρχει (a, γ) ακμή.

Παραδείγματα

- Σχέση $a|b$ (a διαιρεί b , στο \mathbb{N}).
 - Ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
 - Π.χ. γράφημα σχέσης $a|b$ στο $\{1, \dots, 12\}$.



Παραδείγματα

- $R_1 = \{(a, \beta): a \leq \beta\}$
 - Ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_2 = \{(a, \beta): a > \beta\}$
 - Όχι ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_3 = \{(a, \beta): a = \beta \text{ ή } a = -\beta\}$
 - Ανακλαστική, συμμετρική, όχι αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_4 = \{(a, \beta): a = \beta\}$
 - Ανακλαστική, συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.
- $R_5 = \{(a, \beta): a + \beta \leq 3\}$
 - Όχι ανακλαστική, συμμετρική, όχι αντισυμμετρική, όχι μεταβατική.
- $R_6 = \{(A, B): A \subseteq B\}$
 - Ανακλαστική, όχι συμμετρική, αντισυμμετρική, μεταβατική.

Ερώτηση

- Τι δηλώνουν οι παρακάτω προτάσεις;
 - Αληθεύουν σε πεπερασμένο σύμπαν;
 - Αληθεύουν σε άπειρο σύμπαν;

$$\begin{aligned} & \forall x R(x, x) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(y, x)) \wedge \\ & \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(x, y)) \end{aligned}$$

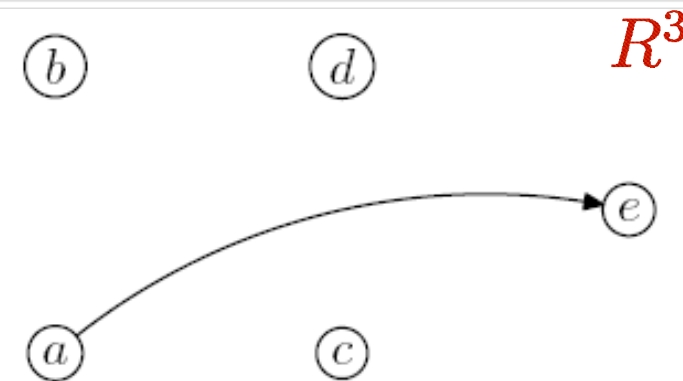
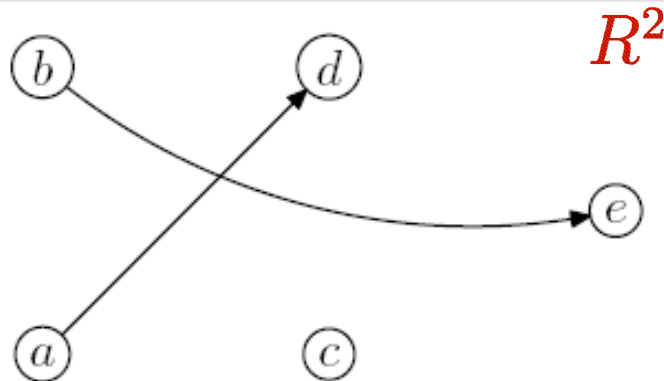
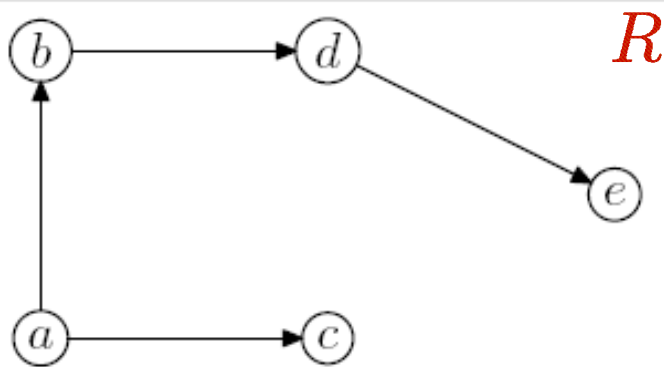
$$\begin{aligned} & \forall x R(x, x) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ & \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \wedge \\ & \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x)) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & \exists x \forall y R(x, y) \wedge \\ & \exists x \forall y R(y, x) \end{aligned}$$

Πράξεις μεταξύ Σχέσεων

- Σχέσεις (στα ίδια σύνολα) συνδυάζονται με **πράξεις συνόλων**:
 - Ένωση, τομή, διαφορά, συμπλήρωμα, συμμετρική διαφορά.
 - Πως **υπολογίζονται** από αναπαράσταση με **πίνακα** ή **γράφημα**;
- **Αντίστροφη** σχέση $R^{-1} = \{(\beta, \alpha) : (\alpha, \beta) \in R\}$
 - R φοιτητές δηλώνουν μαθήματα:
 R^{-1} μαθήματα δηλώνονται από φοιτητές.
 - **Ανάστροφος** πίνακας, αντιστροφή φοράς των ακμών.
- **Σύνθεση** $S \circ R \subseteq A \times \Gamma$ σχέσεων $R \subseteq A \times B$ και $S \subseteq B \times \Gamma$:
 - $S \circ R = \{(\alpha, \gamma) : \exists \beta \text{ τ.ω. } (\alpha, \beta) \in R \text{ και } (\beta, \gamma) \in S\}$
 - Σύνθεση συναρτήσεων προκύπτει ως ειδική περίπτωση.
 - Δεν είναι αντιμεταθετική!
 - Υπολογισμός με **Boolean** πολλαπλασιασμό πινάκων.

Πράξεις μεταξύ Σχέσεων

- Σύνθεση σχέσης $R \subseteq A \times A$ με τον εαυτό της: $R^2 = R \circ R$.
- n -οστή «δύναμη» σχέσης $R \subseteq A \times A$: $R^n = R^{n-1} \circ R$, $R^1 = R$.
 - $R^3 = (R \circ R) \circ R$, $R^4 = ((R \circ R) \circ R) \circ R$, ...
 - Υπολογισμός με Boolean πολλαπλασιασμό πινάκων.
 - «Διαδρομή» μήκους $k \geq 0$ σε σχέση R : ακολουθία $a_0, \dots, a_k \in A$ τ.ω. $(a_i, a_{i+1}) \in R$ για κάθε $i < k$.
 - $R^n = \{(a, \beta) : \text{υπάρχει } a - \beta \text{ διαδρομή μήκους } n \text{ στην } R\}$
 - Απόδειξη με επαγωγή (άσκηση).



Πράξεις μεταξύ Σχέσεων

- Σχέση $R \subseteq A \times A$ **μεταβατική** αν $R^n \subseteq R$ για $n = 1, 2, 3, \dots$
- $R^n \subseteq R$ για $n = 1, 2, 3, \dots$. Άρα και $R^2 \subseteq R$.
 - Για κάθε $(a, \beta), (\beta, \gamma) \in R$, έχουμε $(a, \gamma) \in R^2 \subseteq R$.
 - Άρα $(a, \gamma) \in R$, και R μεταβατική.
- R μεταβατική. Απόδειξη με **επαγωγή** ότι $R^n \subseteq R$, για $n = 1, 2, \dots$
 - Βάση: $R \subseteq R$, ισχύει τετριμμένα για $n = 1$.
 - Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι $R^n \subseteq R$ για αυθαίρετο $n \geq 1$.
 - Επαγωγικό βήμα: Θδο $\forall (a, \gamma) \in R^{n+1}, (a, \gamma) \in R$.
 - $(a, \gamma) \in R^{n+1}$
 - (ορισμός R^{n+1}) $\Rightarrow \exists \beta$ τ.ω. $(a, \beta) \in R$ και $(\beta, \gamma) \in R^n$
 - (επαγ. υπόθ. $R^n \subseteq R$) $\Rightarrow \exists \beta$ τ.ω. $(a, \beta) \in R$ και $(\beta, \gamma) \in R$
 - (R μεταβατική) $\Rightarrow (a, \gamma) \in R$

Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

- (Συστήματα Διαχείρισης) **Βάσεων Δεδομένων** (DBMSs) επιτρέπουν αποδοτική **αποθήκευση** και **επεξεργασία** μεγάλου όγκου δεδομένων.
- Σχεσιακές ΒΔ βασίζονται σε **n-μελείς σχέσεις**:
 - Δεδομένα αποθηκεύονται σε **πίνακες**.
 - Πίνακας: **n-μελής σχέση** (στήλες: **πεδία**, #στηλών: **βαθμός** πίνακα).
 - Στοιχεία σχέσης: **εγγραφές**.

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

- (Πρωτεύον) κλειδί πίνακα: πεδίο με **μοναδική τιμή** σε κάθε εγγραφή.
 - Τιμή κλειδιού προσδιορίζει μοναδικά εγγραφή πίνακα.

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

Σχεσιακές Βάσεις Δεδομένων

- (Πρωτεύον) κλειδί πίνακα: πεδίο με **μοναδική τιμή** σε κάθε εγγραφή.
 - Τιμή κλειδιού προσδιορίζει μοναδικά εγγραφή πίνακα.
- Αν ένα πεδίο δεν αρκεί, **σύνθετο (πρωτεύων) κλειδί**: καρτεσιανό γινόμενο ≥ 2 πεδίων ώστε τιμή να **προσδιορίζει μοναδικά** εγγραφή.

Πίνακας 2: Μαθήματα – Βαθμολογία			
Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007

Επιλογή

- n -μελής σχέση R , C συνθήκη για στοιχεία R .
- **Επιλογή** (γραμμών) από R υπό **συνθήκη C** :
 - n -μελής σχέση με στοιχεία R που ικανοποιούν συνθήκη C .
 - Επιλογή από Φοιτητές με Όνομα = «Δημήτριος».
 - Επιλογή από Φοιτητές με $AM \leq 950$.

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	A.M.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

Επιλογή

- n-μελής σχέση R, C συνθήκη για στοιχεία R.
- **Επιλογή** (γραμμών) από R υπό **συνθήκη C**:
 - n-μελής σχέση με στοιχεία R που ικανοποιούν συνθήκη C.
 - Επιλογή από Φοιτητές με Όνομα = «Δημήτριος».
 - Επιλογή από Φοιτητές με AM ≤ 950 .
 - Επιλογή από Μαθ-Βαθμ. με Μάθημα = «Διακριτά» και Βαθμ ≥ 8.0

A.M.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007

Προβολή

- n -μελής σχέση R , πεδία (στήλες) (i_1, i_2, \dots, i_k) της R .
- **Προβολή** (επί στηλών) (i_1, i_2, \dots, i_k) της R :
 - k -μελής σχέση με στοιχείο $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ για κάθε στοιχείο $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in R$ (μια φορά κάθε k -αδα).
 - Προβολή **Φοιτητές** στην στήλη **Όνομα** και **Όνομα Πατέρα**.

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	A.M.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

Προβολή

- n -μελής σχέση R , πεδία (στήλες) (i_1, i_2, \dots, i_k) της R .
- **Προβολή** (επί στηλών) (i_1, i_2, \dots, i_k) της R :
 - k -μελής σχέση με στοιχείο $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ για κάθε στοιχείο $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in R$ (μια φορά κάθε k -αδα).
 - Προβολή Φοιτητές στην στήλη Όνομα και Όνομα Πατέρα.
 - Προβολή Μαθ-Βαθμ. στις στήλες Μάθημα και Εξεταστική.

Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007

Συνένωση (Join)

- n -μελής σχέση R , m -μελής σχέση S , με p κοινά πεδία.
- **Συνένωση** R και S επί p κοινών πεδίων:
 - $(n+m-p)$ -μελής σχέση με στοιχεία
$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-p}, b_1, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_{m-p})$$
όπου $(a_1, a_2, \dots, a_{n-p}, b_1, \dots, b_p) \in R$ και $(b_1, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_{m-p}) \in S$
 - Σχέση συνένωσης: προβολή (στα $n+m-p$ διαφορετικά πεδία) επί υποσυνόλου της $R \times S$ με εγγραφές με ίδια τιμή στα κοινά πεδία.

Παράδειγμα Συνένωσης

Πίνακας 1: Φοιτητές			
Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατέρα	Α.Μ.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041
Παπαδόπουλος	Απόστολος	Αθανάσιος	996
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850
Νικολάου	Απόστολος	Ανδρέας	1201

Πίνακας 2: Μαθήματα – Βαθμολογία			
Α.Μ.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007

Παράδειγμα Συνένωσης

Πίνακας 3: Φοιτητές – Βαθμολογία

Επώνυμο	Όνομα	Ον. Πατ.	A.M.	Μάθημα	Βαθμ.	Εξετ.
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041	Διακριτά Μαθηματικά	10	6/2007
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041	Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα	10	2/2008
Φωτάκης	Δημήτριος	Ανδρέας	1041	Κρυπτογραφία	8.5	2/2009
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850	Διακριτά Μαθηματικά	8.5	9/2006
Αθανασίου	Δημήτριος	Ανδρέας	850	Βάσεις Δεδομένων	10	2/2007