

Μετασχηματισμοί, Αναπαράσταση και Ισομορφισμός Γραφημάτων

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

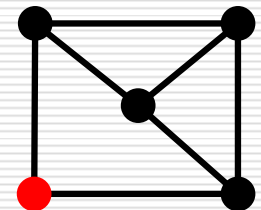
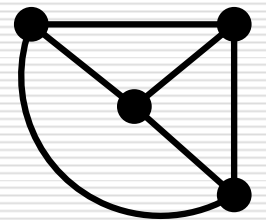
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



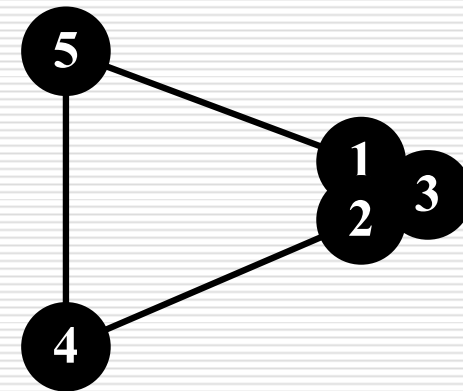
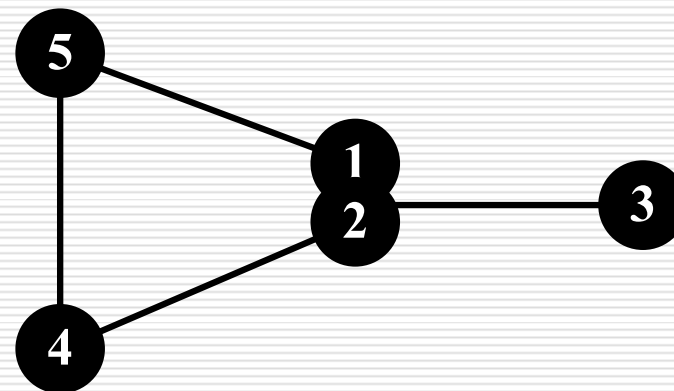
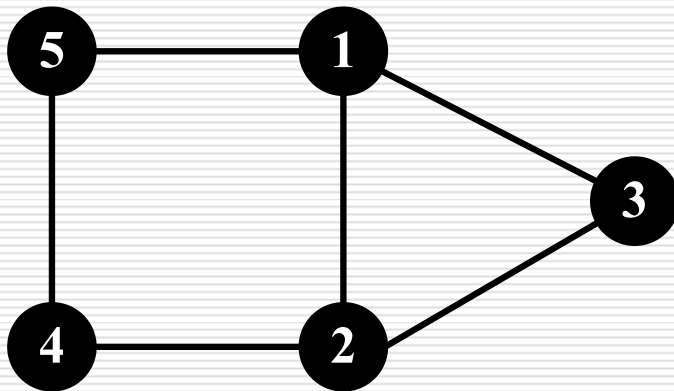
Τοπικοί Μετασχηματισμοί

- Δεδομένου γραφήματος $G(V, E)$:
 - Διαγραφή / προσθήκη ακμής e : $G-e$ και $G+e$
 - Διαγραφή κορυφής v : $G-v$
 - Αφαιρούμε v και όλες τις ακμές που προσπίπτουν στη v .
 - Υποδιαίρεση ακμής $\{u, v\}$: νέα κορυφή w «παρεμβάλλεται» στην $\{u, v\}$ και έχουμε $\{u, w\}, \{w, v\}$ αντί της $\{u, v\}$.
 - Απλοποίηση σειράς (κορυφής w βαθμού 2): ακμές $\{u, w\}, \{w, v\}$ αντικαθίστανται από $\{u, v\}$.
 - k -οστή δύναμη του G : G^k
 - Ίδιο σύνολο κορυφών V .
 - Κορυφές u και v ενώνονται με ακμή στο G^k αν συνδέονται με μονοπάτι μήκους $\leq k$ στο G .



Σύμπτυξη Ακμής

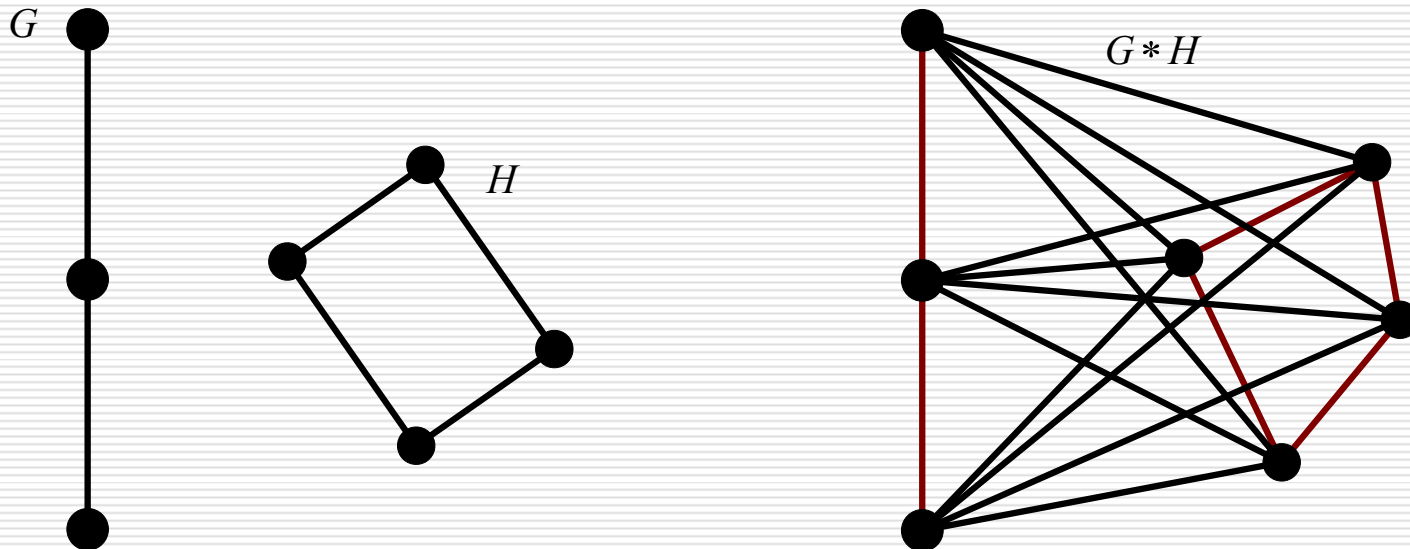
- Σύμπτυξη (contraction) ακμής $\{u, v\}$:
 - Αντικατάσταση u, v από μία νέα κορυφή uv .
 - Κάθε ακμή $\{x, u\} / \{x, v\}$ αντικαθίσταται από ακμή $\{x, uv\}$.
 - Ακμή $\{u, v\}$ και πιθανές παράλληλες ακμές παραλείπονται (εκτός αν θεωρούμε πολυγραφήματα).



Σύνδεση Γραφημάτων

- **Σύνδεση** (join) $G*H$ δύο γραφημάτων G και H :
 - Διατηρούμε τα γραφήματα G και H ως έχουν.
 - Συνδέουμε όλες τις κορυφές του G με όλες τις κορυφές του H .

$$G*H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{\{u, v\} : u \in V(G), v \in V(H)\})$$

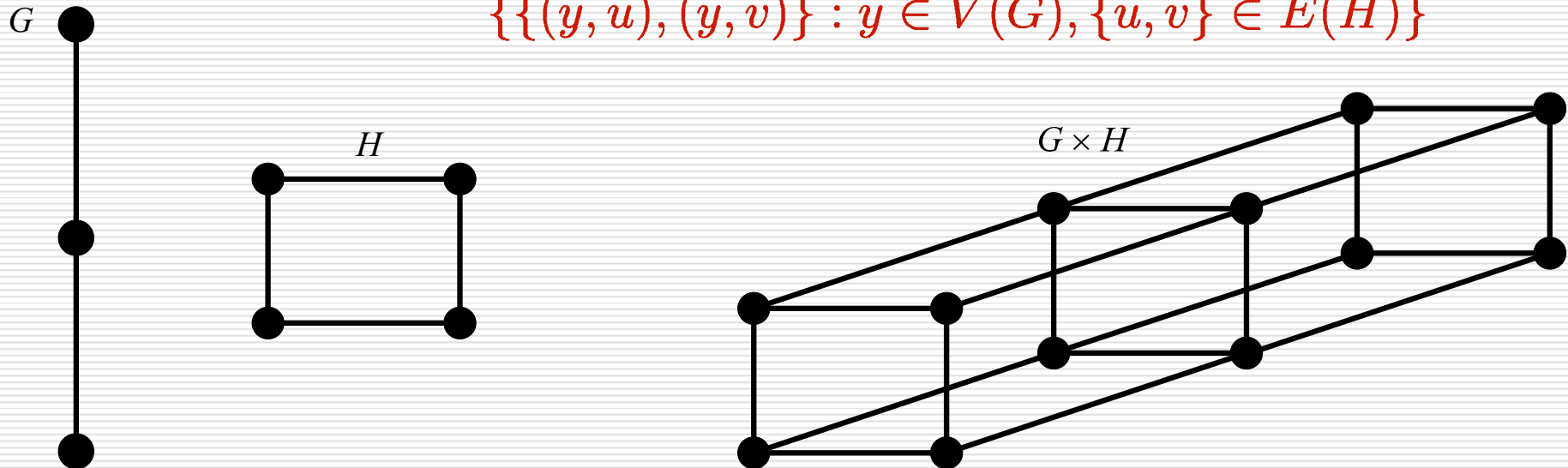


Γινόμενο Γραφημάτων

- **Γινόμενο** (product) $G \times H$ δύο γραφημάτων G και H :
 - Ένα αντίγραφο του H για κάθε κορυφή του G .
 - Αντίστοιχες κορυφές δύο αντιγράφων του H συνδέονται αν αντίστοιχες κορυφές G συνδέονται με ακμή.

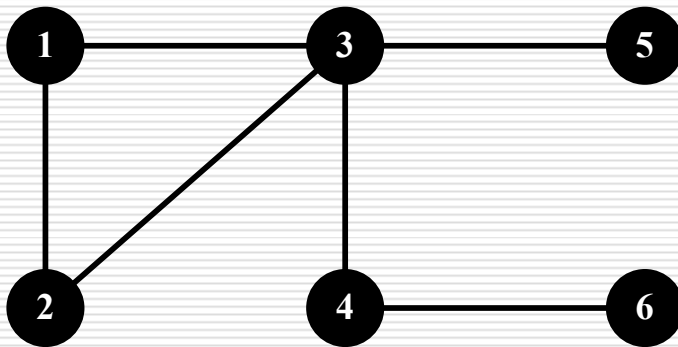
$$V(G \times H) = \{(u, v) : u \in V(G), v \in V(H)\}$$

$$E(G \times H) = \{ \{(u, x), (v, x)\} : \{u, v\} \in E(G), x \in V(H) \} \cup \{ \{(y, u), (y, v)\} : y \in V(G), \{u, v\} \in E(H) \}$$



Αναπαράσταση Γραφημάτων

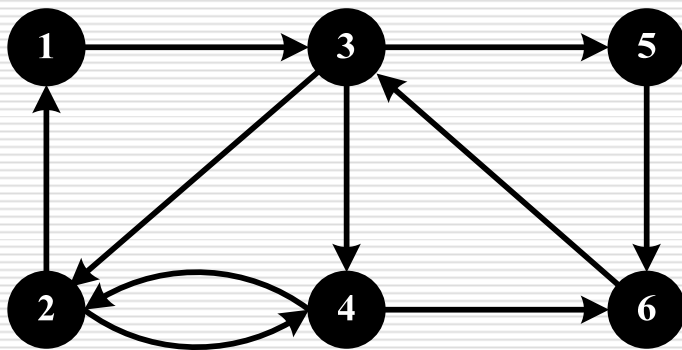
- ... με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
- Αν έχουμε βάρη, $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- (Απλό) μη κατευθυνόμενο: **συμμετρικός**, διαγώνιος 0.
- Άθροισμα στοιχείων γραμμής (στήλης): **βαθμός** κορυφής.



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Αναπαράσταση Γραφημάτων

- ... με **πίνακα γειτνίασης**: $A[i, j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$
- Αν έχουμε βάρη, $A[i, j] = w(v_i, v_j)$
- Άθροισμα στοιχείων γραμμής / στήλης σε κατευθυνόμενο: έξω-βαθμός / έσω-βαθμός κορυφής.



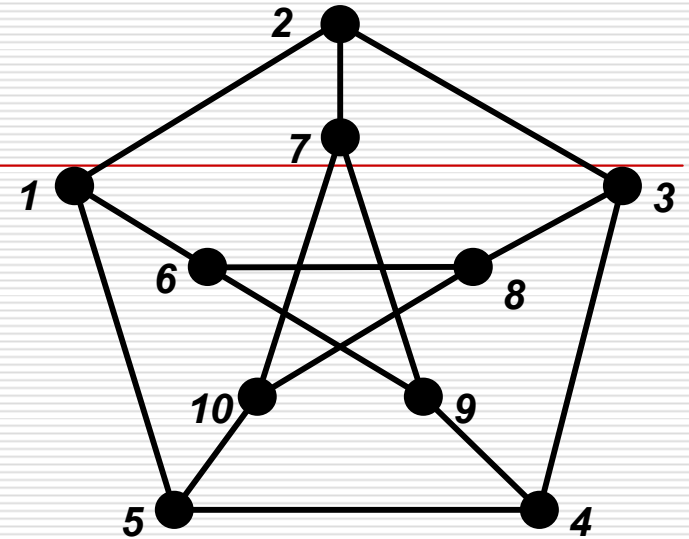
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Πίνακας Γειτνίασης

- $A^k[u_i, u_j]$ = #διαδρομών $u_i - u_j$ μήκους k (απλά γραφήματα).
 - Απόδειξη με επαγωγή και πολλαπλασιασμό πινάκων.
 - Διαγώνιος τετραγώνου (μη κατευθυνόμενα): $A^2[u_i, u_i]$ = βαθμός(u_i).
 - $A^3[u_i, u_i]$ = $2 \times$ #τριγώνων που συμμετέχει u_i .
 - Πλήθος τριγώνων = $\sum_{i=1}^n A^3[u_i, u_i]/6$
- $Y[u_i, u_j]$ = #διαδρομών $u_i - u_j$ μήκους $\leq n - 1$. $Y = \sum_{k=1}^{n-1} A^k$
 - Μονοπάτια έχουν μήκος $\leq n - 1$, και διαδρομή ανν μονοπάτι.
 - Γράφημα **συνεκτικό** ανν **όλα τα στοιχεία του Y θετικά** (> 0).
- Μήκος ελάχιστου (#ακμών) $u_i - u_j$ μονοπατιού:
 - **Ελάχιστη** τιμή k ώστε $A^k[u_i, u_j] > 0$.

Πίνακας Πρόσπτωσης

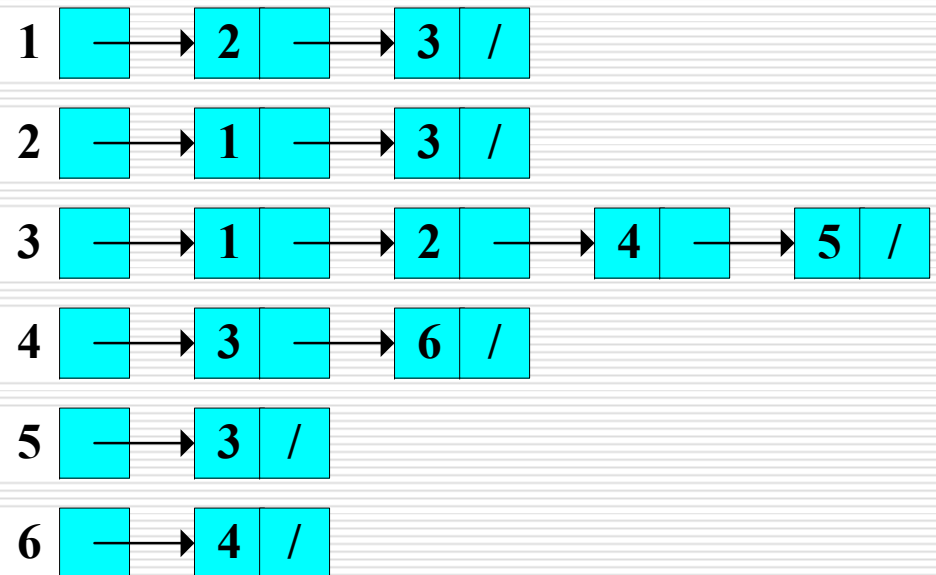
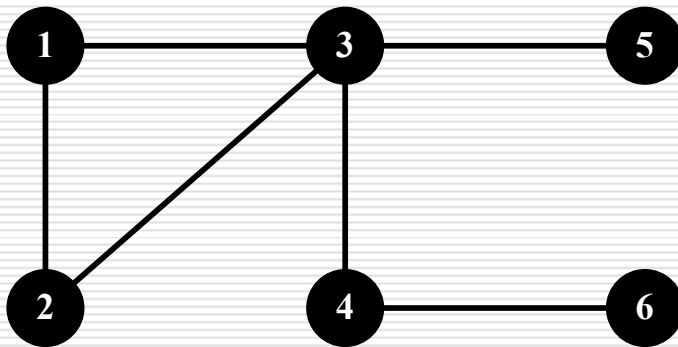
$$A[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in e_j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



| | 1,2 | 1,5 | 1,6 | 2,3 | 2,7 | 3,4 | 3,8 | 4,5 | 4,9 | 5, 10 | 6,8 | 6,9 | 7,9 | 7, 10 | 8, 10 |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|-----|-----|-----|-------|-------|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

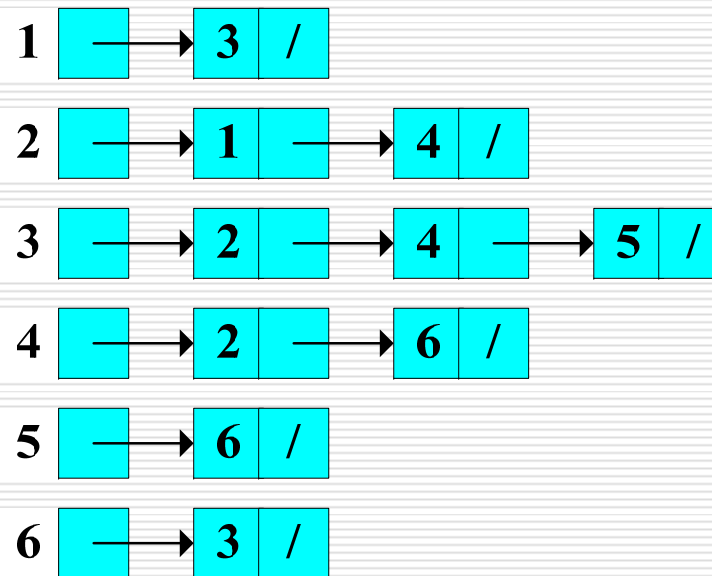
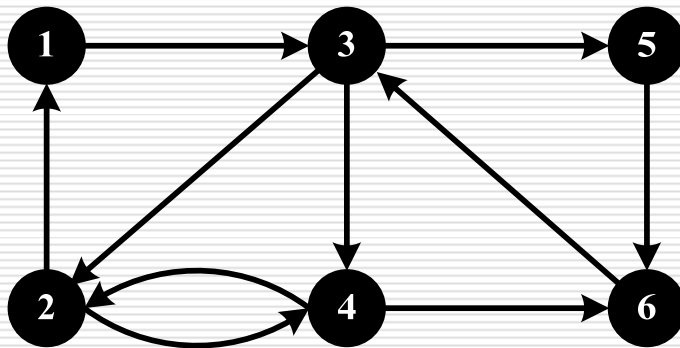
Αναπαράσταση Γραφημάτων

- Στον υπολογιστή: με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές **σε λίστα**.
 - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.



Αναπαράσταση Γραφημάτων

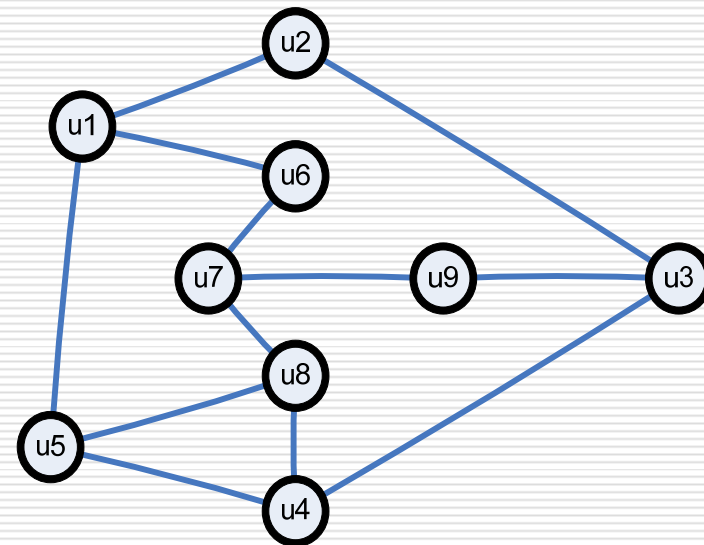
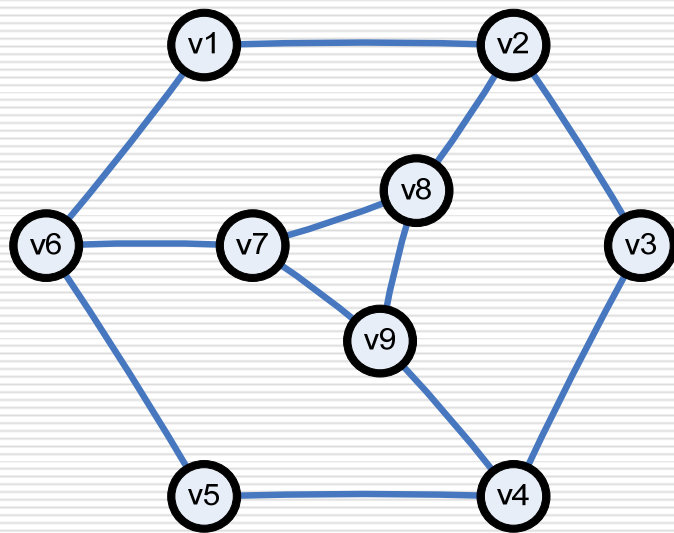
- Στον υπολογιστή: με **λίστα γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστα.
 - Βάρη αποθηκεύονται στους κόμβους της λίστας.
 - Αλγόριθμοι συνήθως λειτουργούν κατά γειτονιές.
 - Οικονομία χώρου.



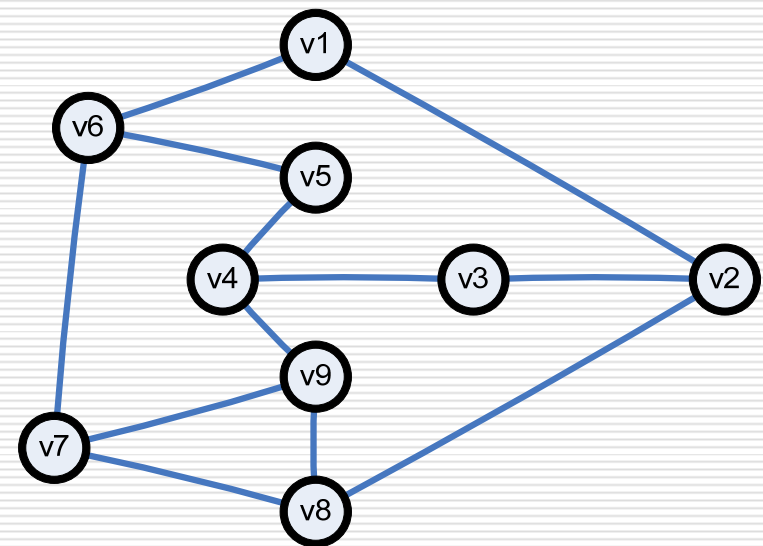
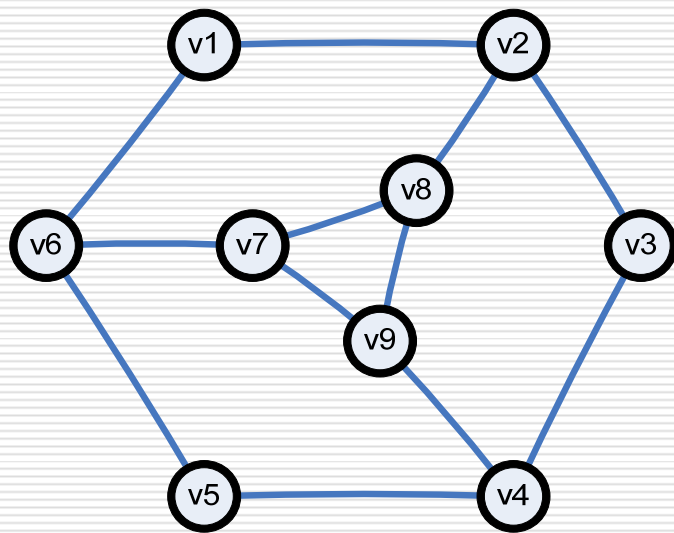
Ισομορφικά Γραφήματα

- Γραφήματα $G(V_G, E_G)$ και $H(V_H, E_H)$ είναι **ισομορφικά** αν υπάρχει **1-1 και επί** συνάρτηση $f: V_G \rightarrow V_H$ (**ισομορφισμός**) ώστε για κάθε $u, v \in V_G$, $\{u, v\} \in E_G$ αν $\{f(u), f(v)\} \in E_H$
 - Υπάρχει **αντιστοιχία κορυφών** που διατηρεί τη **γειτονικότητα**.
 - Ισομορφισμός αποτελεί **σχέση ισοδυναμίας**.
- **Αναλλοίωτη ιδιότητα:** ισομορφικά γραφήματα «συμφωνούν».
 - Όλες οι σημαντικές ιδιότητες: **#κορυφών**, **#ακμών**, **βαθμοί**, **συνεκτικότητα**, **κύκλος Euler και Hamilton**, **χρωματικός αριθμός**, ...
- Πως αποδεικνύουμε ότι δύο γραφήματα ισομορφικά:
 - Βρίσκουμε ισομορφισμό και ελέγχουμε ότι διατηρεί γειτονικότητα.
 - Αποδεικνύουμε ότι τα συμπληρωματικά τους είναι ισομορφικά.

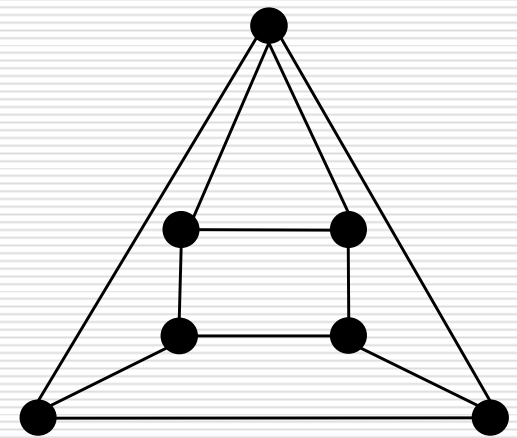
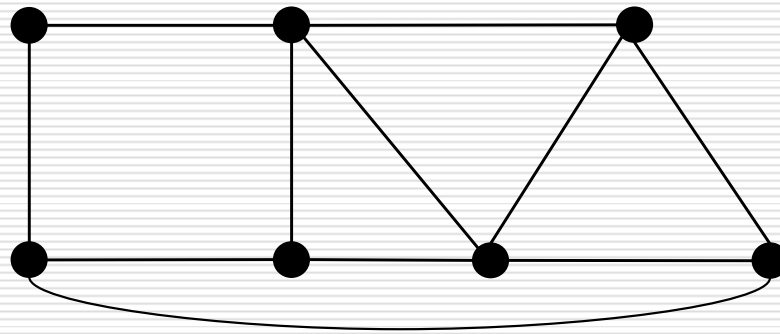
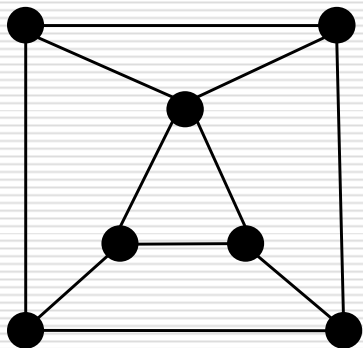
Ισομορφικά Γραφήματα



Ισομορφικά Γραφήματα



Ισομορφικά Γραφήματα

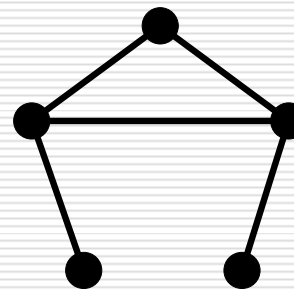
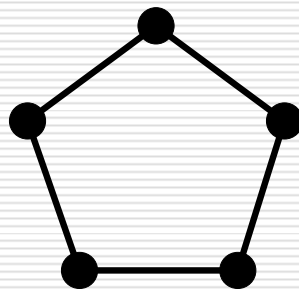


Ισομορφικά Γραφήματα

- Πως αποδεικνύω ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά:
 - Βρίσκω μια αναλλοίωτη ιδιότητα στην οποία «διαφωνούν».
 - Να βρούμε όλα τα **μη ισομορφικά** συνεκτικά γραφήματα με 6 κορυφές, 4 κορ. βαθμού 3 και 2 κορ. βαθμού 4.
- **Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα:** γράφημα ισομορφικό με το συμπληρωματικό του.
 - Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα έχει $n(n-1)/4$ ακμές.
 - Αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα υπάρχουν μόνο αν n ή $n-1$ είναι **πολλαπλάσιο του 4**.
 - Νδο κάθε αυτοσυμπληρωματικό γράφημα είναι **συνεκτικό**.

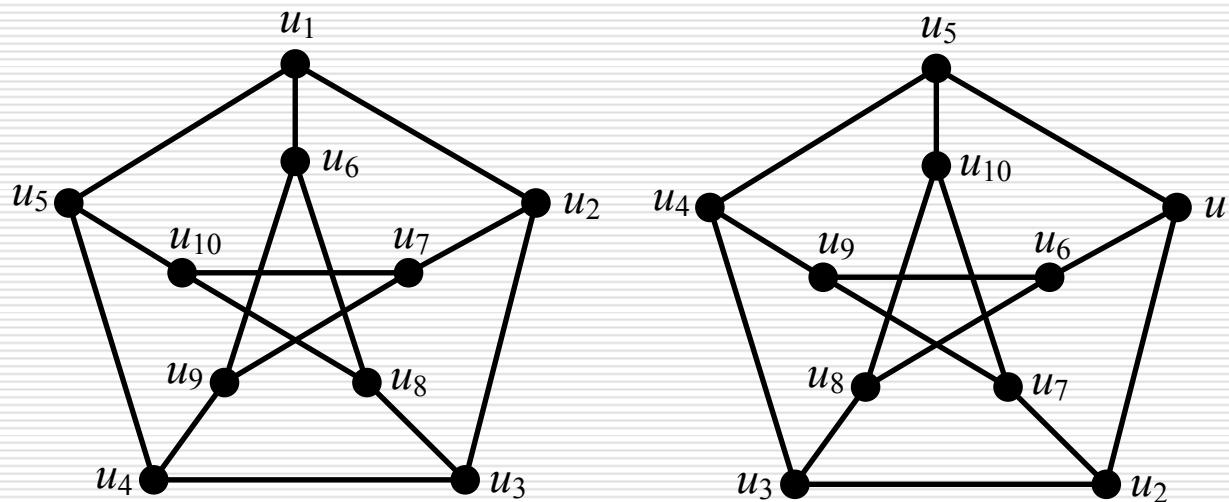
Αυτοσυμπληρωματικά Γραφήματα

- **Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα:** γράφημα ισομορφικό με το συμπληρωματικό του.
- Αυτοσυμπληρωματικό γράφημα έχει $n(n-1)/4$ ακμές.
- Υπάρχουν αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα για:
 - $n = 1$: μεμονωμένη κορυφή.
 - $n = 4$: μονοπάτι μήκους 3
 - $n = 5, 8, 9, \dots$:



Αυτομορφισμός

- Ισομορφισμός ενός γραφήματος στον εαυτό του.
 - Εκφράζει «**συμμετρία**» γραφήματος: αντιστοιχία κορυφών με βάση τους «**ρόλους**» τους – διατηρεί **δομή** γραφήματος.
 - **Ταυτοτικός** αυτομορφισμός (υπάρχει τετριμμένα). Αν δεν υπάρχουν άλλοι αυτομορφισμοί, γράφημα είναι **μη συμμετρικό**.
 - Αυτομορφισμοί μονοπατιού, κύκλου, τροχού, Petersen.



Αυτομορφισμός

- Ισομορφισμός ενός γραφήματος στον εαυτό του.
 - Εκφράζει «συμμετρία» γραφήματος: αντιστοιχία κορυφών με βάση τους «ρόλους» τους – διατηρεί δομή γραφήματος.
 - Όλα τα συνεκτικά γραφήματα με 2, 3, 4, και 5 κορυφές είναι συμμετρικά.
 - Παραδείγματα μη συμμετρικών γραφημάτων:

