

Στοιχεία Κατηγορηματικής Λογικής

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Κατηγορηματική Λογική

- **Προτασιακή Λογική:** πλαίσιο διατύπωσης και μελέτης επιχειρημάτων για **πεπερασμένο πλήθος «λογικών αντικειμένων».**
 - «Λογικό αντικείμενο»: παίρνει τιμές αλήθειας, Α ή Ψ.
 - Διαφορετικά, «μη λογικό αντικείμενο», π.χ. αριθμοί, σύνολα, ...
- **Κατηγορηματική (ή Πρωτοβάθμια) Λογική:** πλαίσιο διατύπωσης και μελέτης επιχειρημάτων για:
 - «Μη λογικά αντικείμενα» (αριθμούς, σύνολα, γραφήματα).
 - **Πράξεις (συναρτήσεις)** και **σχέσεις (κατηγορήματα)** μεταξύ τους.
 - Άπειρο πλήθος αντικειμένων: **ποσοδείκτες**.
 - «Κάθε φυσικός αριθμός είναι είτε άρτιος είτε περιπτός».
 - «Υπάρχει σύνολο που είναι υποσύνολο κάθε συνόλου».
 - Τύποι ΚΛ είναι **«λογικά αντικείμενα»** που μπορεί να αφορούν / αναφέρονται σε **«μη λογικά αντικείμενα»**.

Συντακτικό Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- «Λογικά Σύμβολα»: έχουν **συγκεκριμένη ερμηνεία**, λειτουργούν πάντα με τον ίδιο τρόπο:
 - **Λογικοί σύνδεσμοι:** \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
 - **Ποσοδείκτες:** \forall και \exists
 - \forall (για κάθε): **σύζευξη** για όλα στοιχεία δομής (δυνάμει άπειρη).
 - \exists (υπάρχει): **διάζευξη** για όλα στοιχεία δομής (δυνάμει άπειρη).
 - Σημεία στίξης και παρενθέσεις.

Συντακτικό Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- «Μη Λογικά Σύμβολα»: ερμηνεία καθορίζει λειτουργία τους.
 - Ορισμός γλώσσας και έλεγχος αλήθειας απαιτούν ερμηνεία τους (πολυσημία, εκφραστικότητα!).
 - Μεταβλητές x, y, z, \dots
 - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού μεταβλητών: **σύμπαν**.
 - **Ελεύθερες**: τιμή τους καθορίζεται με **αποτίμηση**.
 - **Δεσμευμένες**: **ποσοδείκτες** καθορίζουν «συμπεριφορά» τους.
 - Σύμβολα **σταθερών** c, c_1, c_2, \dots
 - Αναπαριστούν **συμβολικά συγκεκριμένες τιμές σύμπαντος**.
 - Ερμηνεία καθορίζει **τιμή** κάθε συμβόλου σταθεράς.
 - Πρόκειται για 0-θέσια συναρτησιακά σύμβολα.

Συντακτικό Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

- «Μη Λογικά Σύμβολα»: ερμηνεία καθορίζει λειτουργία τους.
 - Συναρτησιακά σύμβολα f, g, h, \dots , με αντίστοιχο πλήθος ορισμάτων.
 - Π.χ. f είναι 2-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο.
 - Εκφράζουν «**πράξεις**» μεταξύ στοιχείων σύμπαντος.
 - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, και **λειτουργία**.
 - Κατηγορηματικά σύμβολα P, Q, R, \dots , με αντίστοιχο πλήθος ορισμάτων.
 - Π.χ. Q είναι 2-μελές κατηγορηματικό σύμβολο.
 - Εκφράζουν «**σχέσεις**» μεταξύ στοιχείων σύμπαντος.
 - Ερμηνεία καθορίζει πεδίο ορισμού και **λειτουργία**.
 - **Iσότητα =** : ελέγχει **ταύτιση** (λειτουργεί ως κατηγόρημα), αλλά έχει δεδομένη ερμηνεία.
 - Κατηγορηματικά σύμβολα υλοποιούν «μετάβαση» από «μη λογικό» σε «λογικό» κόσμο.
 - $Q(x, y)$ δέχεται δύο στοιχεία σύμπαντος (π.χ. αριθμούς), «ελέγχει» αν σχετίζονται με συγκεκριμένο τρόπο, και «απαντά» $A \in \Psi$.

Δομή Τύπων Πρωτοβάθμιας Γλώσσας: 'Όροι

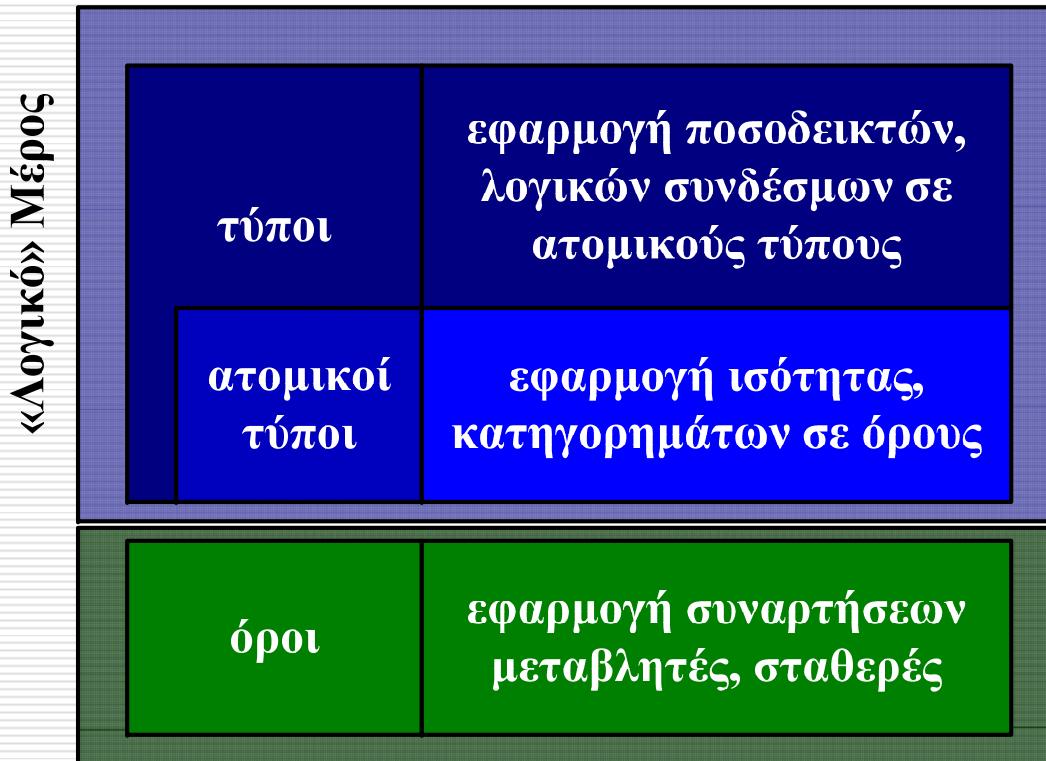
- 'Όροι παίρνουν τιμές στο σύμπαν.
 - Μεταβλητές x, y, z, \dots
 - Σταθερές c, c_1, c_2, \dots
 - Οτιδήποτε προκύπτει από (σωστή) εφαρμογή συναρτησιακού συμβόλου σε ήδη σχηματισμένους όρους.
 - Π.χ. $f(x, y), f(g(x), c), g(f(x, g(y))), c \oplus f(x, y), \dots$
- Δομή αναπαρίσταται με δενδροδιάγραμμα, ιδιότητες αποδεικνύονται με δομική επαγωγή.
- 'Όροι **δεν** μπορούν να συνδέονται με λογικούς συνδέσμους!

Δομή Τύπων

Πρωτοβάθμιας Γλώσσας: Τύποι

- Ατομικοί τύποι προκύπτουν εφαρμόζοντας ισότητα ή κατηγορηματικό σύμβολο σε όρους.
 - Π.χ. $x = c$, $f(x, y) = g(c)$, $Q(x, y)$, $R(f(x, y))$, ...
 - «Λογικές» τιμές A ή Ψ , βασικά («λογικά») δομικά στοιχεία τύπων.
- Τύπος:
 - Ατομικός τύπος (βάση επαγωγικού ορισμού).
 - Εφαρμογή λογικών συνδέσμων σε τύπους Φ , Ψ :
 $\neg\Phi$, $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \rightarrow \Psi$, $\Phi \leftrightarrow \Psi$.
 - Εφαρμογή ποσοδεικτών σε τύπο Φ : $\exists x\Phi$, $\forall x\Phi$.
- Δομή αναπαρίσταται με δενδροδιάγραμμα, ιδιότητες αποδεικνύονται με μαθηματική επαγωγή.
- Τύποι: τιμή A ή Ψ . Όροι: τιμές στο σύμπαν.

Δομή Τύπων Πρωτοβάθμιας Γλώσσας



Παράδειγμα

- Ποια από τα παρακάτω είναι όροι ή τύποι (ή συντακτικό λάθος);
- $Q(f(c, y), P(x))$ $g(Q(c, y), P(y))$
 - $Q(f(c, y), \textcolor{red}{P(x)})$ $\textcolor{red}{g(Q(c, y), P(y))}$
 - $\forall x P(g(x))$ $\forall x g(P(x))$
 - $\forall x P(g(x)) (\tau)$ $\forall x \textcolor{red}{g(P(x))}$
 - $x = y \vee c$ $x = f(y, c)$
 - $x = \textcolor{red}{y} \vee \textcolor{red}{c}$ $x = f(y, c) (\alpha\tau)$
 - $\forall x P(P(x))$ $\exists x Q(x, c_1)$
 - $\forall x P(\textcolor{red}{P(x)})$ $\exists x Q(x, c_1) (\tau)$
 - $\exists x (P(x) \vee \neg \forall x P(x, x))$ $\exists x (x = y \wedge Q(x, y))$
 - $\exists x (\textcolor{red}{P(x)} \vee \neg \forall x \textcolor{red}{P(x, x)})$ $\exists x (x = y \wedge Q(x, y)) (\tau)$

Παράδειγμα

- Ποια από τα παρακάτω είναι όροι ή τύποι (ή συντακτικό λάθος);
- $P(x) \vee g(x)$ $\forall y \exists x (Q(x, g(y)) \vee P(g(x)))$
 - $P(x) \vee \textcolor{red}{g(x)}$ $\forall y \exists x (Q(x, g(y)) \vee P(g(x))) \text{ (τ)}$
 - $\exists x Q(x, c)$ $\forall \exists x Q(x, y)$
 - $\exists x Q(x, c) \text{ (τ)}$ $\forall \exists x Q(x, y)$
 - $x + y = x * y$ $(3 + 1) + 10$
 - $x + y = x * y \text{ (στ)}$ $(3 + 1) + 10 \text{ (op)}$
 - $\forall x \exists y (x + y = x * y)$ $\forall x \exists y (P(x) \vee (Q(x, y) \rightarrow \neg P(x)))$
 - $\forall x \exists y (x + y = x * y) \text{ (τ)}$ $\forall x \exists y (P(x) \vee (Q(x, y) \rightarrow \neg P(x))) \text{ (τ)}$

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Δεσμευμένη **εμφάνιση** μεταβλητής: εμπίπτει σε **πεδίο εφαρμογής** ποσοδείκτη.
 - Ποσοδείκτης καθορίζει πως αποτιμάται η μεταβλητή.
 - $\forall (\exists)$: σύζευξη (διάζευξη) για όλες τιμές σύμπαντος.
 - Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητής x που εμπίπτουν **στον ίδιο ποσοδείκτη**: «ίδια» δεσμευμένη μεταβλητή.
 - Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητής x που εμπίπτουν **σε διαφορετικό ποσοδείκτη**: «διαφορετικές» δεσμευμένες μεταβλητές.
- Ελεύθερη **εμφάνιση** μεταβλητής: **δεν** εμπίπτει σε πεδίο εφαρμογής κάποιου **ποσοδείκτη**.
 - Μπορεί να έχει **οποιαδήποτε τιμή**, η οποία καθορίζεται από **αποτίμηση**.
 - **'Όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητής x : «ίδια» μεταβλητή.**
- $\exists \mathbf{x} (P(\mathbf{x}) \wedge Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \wedge P(\mathbf{y})$ και $\exists \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \wedge \exists \mathbf{x} Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \wedge P(\mathbf{y})$

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Ελεύθερη μεταβλητή αν εμφανίζεται ελεύθερη (τουλ. μία φορά), διαφορετικά δεσμευμένη.
- Πρόταση: τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.
Τιμή αλήθειας πρόταση δεν εξαρτάται από αποτίμηση.

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Ποιές εμφανίσεις μεταβλητών είναι **ελεύθερες** και ποιές **δεσμευμένες**;
 - $\forall y \exists x (P(x, f(y)) \vee Q(x))$ $\forall x \exists y (Q(x) \vee P(x, y)) \rightarrow \neg Q(x)$
 - $\forall \textcolor{red}{y} \exists \textcolor{blue}{x} (P(\textcolor{blue}{x}, f(\textcolor{red}{y})) \vee Q(\textcolor{blue}{x}))$ $\forall \textcolor{blue}{x} \exists \textcolor{red}{y} (Q(\textcolor{blue}{x}) \vee P(\textcolor{blue}{x}, \textcolor{red}{y})) \rightarrow \neg Q(\textcolor{blue}{x})$
 - $\forall x P(x, y) \rightarrow \forall z P(z, x)$ $Q(z) \rightarrow \neg \forall x \forall y P(x, y)$
 - $\forall \textcolor{blue}{x} P(\textcolor{blue}{x}, \textcolor{red}{y}) \rightarrow \forall \textcolor{red}{z} P(\textcolor{red}{z}, \textcolor{blue}{x})$ $Q(\textcolor{blue}{z}) \rightarrow \neg \forall \textcolor{blue}{x} \forall \textcolor{red}{y} P(\textcolor{blue}{x}, \textcolor{red}{y})$
 - $\forall x Q(x) \rightarrow \forall y P(x, y)$ $\forall x \forall y \forall z (x > y \wedge y > z) \rightarrow \exists w (x > w)$
 - $\forall \textcolor{blue}{x} Q(\textcolor{blue}{x}) \rightarrow \forall \textcolor{red}{y} P(\textcolor{blue}{x}, \textcolor{red}{y})$ $\forall \textcolor{blue}{x} \forall \textcolor{red}{y} \forall \textcolor{brown}{z} (\textcolor{blue}{x} > \textcolor{red}{y} \wedge \textcolor{red}{y} > \textcolor{brown}{z}) \rightarrow \exists \textcolor{blue}{w} (\textcolor{blue}{x} > \textcolor{blue}{w})$
 - $y + x = x + y$ $\exists y (x + x = x * y)$
 - $\textcolor{blue}{y} + \textcolor{red}{x} = \textcolor{blue}{x} + \textcolor{red}{y}$ $\exists \textcolor{red}{y} (\textcolor{blue}{x} + \textcolor{red}{x} = \textcolor{blue}{x} * \textcolor{red}{y})$
 - Μετονομασία **όλων** εμφανίσεων της «**ίδιας**» μεταβλητής διατηρεί απαράλλακτο τον τύπο: αλφαριθμητική παραλλαγή.
-

Ελεύθερες και Δεσμευμένες Μεταβλητές

- Ελεύθερη μεταβλητή αν εμφανίζεται ελεύθερη (τουλ. μία φορά), διαφορετικά δεσμευμένη.
- Πρόταση: τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.
Τιμή αλήθειας πρόταση δεν εξαρτάται από αποτίμηση.
- Ελεύθερες μεταβλητές χρειάζονται «**αρχικοποίηση**».
 - Όλες οι ελεύθερες εμφανίσεις μιας μεταβλητής «**αρχικοποιούνται**» στην **ίδια τιμή** (αυτή που καθορίζεται από **αποτίμηση**).
- Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών **δεν** χρειάζονται «**αρχικοποίηση**».
 - Ποσοδείκτης που τις δεσμεύει καθορίζει αποτίμηση.
 - Μεταβλητές που δεσμεύονται από **διαφορετικούς ποσοδείκτες** είναι «**διαφορετικές**» (ακόμη και αν έχουν το ίδιο όνομα).

Ερμηνεία (ή Δομή)

- Ορισμός Πρωτοβάθμιας Γλώσσας **απαιτεί ερμηνεία** «μη λογικών» συμβόλων.
- Ερμηνεία (ή δομή) Α καθορίζει:
 - **Σύμπαν $|A|$** : πεδίο ορισμού σταθερών, μεταβλητών, συναρτήσεων, και κατηγορημάτων.
 - $|A|$ είναι το **σύνολο αντικειμένων** στα οποία αναφερόμαστε.
 - Ορισμός **συναρτησιακών** συμβόλων: «**πράξη**» που αντιστοιχούν.
 - Τι «επιστρέφει» κάθε συναρτησιακό σύμβολο.
 - Ορισμός **κατηγορηματικών** συμβόλων: «**σχέση**» που αντιστοιχούν.
 - Πότε κατηγορηματικό σύμβολο «επιστρέφει» Α και πότε Ψ.
 - Ορισμός **τιμής** για κάθε σύμβολο **σταθεράς**.

Παραδείγματα Ερμηνείας

□ Γλώσσα Θεωρίας Αριθμών:

- Σύμπαν **N** (φυσικοί αριθμοί)
- Σταθερά **0** (αποτ. στο 0), συναρτησιακά \oplus (πρόσθεση),
 \otimes (πολλαπλασιασμός), και $'$ (επόμενος φυσικός),
- κατηγορηματικό $<$ (αντ. σε σχέση $x < y$).

□ Γλώσσα Θεωρίας Συνόλων:

- Σύμπαν δυναμοσύνολο συνόλου **U** (ή σύνολο με στοιχεία σύνολα)
- Σταθερά **\emptyset** (αποτ. στο \emptyset),
- κατηγορηματικό \subseteq (αντ. σε σχέση $x \subseteq y$).

Εναλλαγή Ποσοδεικτών

$\forall x \exists y P(x, y)$

$\forall x \exists y P(y, x)$

$\forall x \forall y P(x, y)$

$\forall x \forall y P(y, x)$

$\exists x \forall y P(x, y)$

$\exists x \forall y P(y, x)$

$\exists x \exists y P(x, y)$

$\exists x \exists y P(y, x)$

$P(x, y)$: ο x **θαυμάζει** τον y

όλοι θαυμάζουν κάποιον
(όχι αναγκαία όλοι τον ίδιο,
μπορεί τον εαυτό τους).

όλοι θαυμάζονται από κάποιον
(όχι αναγκαία όλοι από τον
ίδιο, μπορεί από εαυτό τους).

όλοι θαυμάζουν τους πάντες
(και τον εαυτό τους).

υπάρχει κάποιος που τους
θαυμάζει όλους (και εαυτό του).

υπάρχει κάποιος που τον
θαυμάζουν όλοι (και εαυτός του).

υπάρχει ζευγάρι (όχι αναγκαία
διαφορετικών) που ο **ένας**
θαυμάζει τον **άλλο**.

$P(x, y)$: $x \leq y$

κάθε αριθμός έχει κάποιον
μεγαλύτερο ή ίσο του.

κάθε αριθμός έχει κάποιον
μικρότερο ή ίσο του.

για **κάθε ζευγάρι** αριθμών, **ο**
ένας είναι μικρότερος ή ίσος
του άλλου.

υπάρχει αριθμός μικρότερος
ή ίσος όλων (κάτω φράγμα).

υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος
ή ίσος όλων (άνω φράγμα)

υπάρχουν αριθμοί που ο **ένας**
είναι μικρότερος ή ίσος του
άλλου.

$$\neg \exists x \varphi(x) \equiv \forall x \neg \varphi(x)$$

$$\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)$$

Παραδείγματα

- Δεδομένης ερμηνείας (π.χ. φυσικοί αριθμοί, σύνολα, γραφήματα), διατύπωση προτάσεων – ιδιοτήτων σε πρωτοβάθμια γλώσσα.
- Όλοι οι άνθρωποι θαυμάζουν κάποιον άλλο. $\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(x, y))$
 $\neg \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg P(x, y))$
- Υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν άλλο. $\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg P(x, y))$
- Υπάρχει κάποιος που θαυμάζει τον εαυτό του και μόνον αυτόν. $\exists x (P(x, x) \wedge \forall y (P(x, y) \rightarrow x = y))$
- Όλοι θαυμάζονται από κάποιον άλλο. $\forall x \exists y (x \neq y \wedge P(y, x))$
- Υπάρχει κάποιος που θαυμάζει όλους τους άλλους. $\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow P(x, y))$
- Υπάρχει κάποιος που δεν θαυμάζει κανέναν. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$
- Δεν υπάρχει κανένας άνθρωπος που να τον θαυμάζουν όλοι οι άλλοι. $\neg \exists x \forall y (x \neq y \rightarrow P(y, x))$
 $\forall x \exists y (x \neq y \wedge \neg P(y, x))$

Παραδείγματα

- Απλές γλωσσικές δομές συνήθως επαρκούν.
- Κάθε αντικείμενο με ιδιότητα P $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ έχει ιδιότητα Q .
 - Ο επόμενος κάθε περιπτού αριθμού είναι άρτιος. $\forall x(\text{odd}(x) \rightarrow \text{even}(x'))$
 - $\text{even}(x) \equiv \exists y(x = 2 \otimes y)$ $\text{odd}(x) \equiv \exists y(x = (2 \otimes y) \oplus 1)$ όπου $1 \equiv 0'$ και $2 \equiv (0')'$
 - Κάθε πολλαπλάσιο του 4 είναι άρτιος. $\forall x(\exists y(x = 4 \otimes y) \rightarrow \text{even}(x))$
- Υπάρχει αντικείμενο με ιδιότητα P και ιδιότητα Q $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
 - Δεν είναι όλοι οι άρτιοι πολλαπλάσια του 4. $\exists x(\text{even}(x) \wedge \neg \exists y(x = 4 \otimes y))$

Παραδείγματα

- Υπάρχει **μοναδικό** αντικείμενο με ιδιότητα P .
- Υπάρχει **μέγιστο** (ελάχιστο) στοιχείο με ιδιότητα P .
 - Υπάρχει μοναδικός φυσικός που είναι μικρότερος του 1.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y \leq x))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x \leq y))$$

$$\exists x(x < 1 \wedge \forall y(y < 1 \rightarrow x = y))$$

Παραδείγματα: Αριθμοί

- Το άθροισμα δύο περιπτών είναι άρτιος.

$$\forall x \forall y (\text{odd}(x) \wedge \text{odd}(y) \rightarrow \text{even}(x \oplus y))$$

- Ο x διαιρεί ακριβώς τον y :

$$D(x, y) \equiv \exists z (y = x \otimes z)$$

- Ο x είναι μικρότερος ή ίσος του y :

$$x \leq y \equiv \exists z (y = x \oplus z)$$

- Ο x είναι πρώτος αριθμός:

$$\text{prime}(x) \equiv (x \neq 0) \wedge (x \neq 1) \wedge \forall y \forall z (x = y \otimes z \rightarrow (y = x \vee z = x))$$

Παραδείγματα: Αριθμοί

- Κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 4 γράφεται ως άθροισμα δύο περιπτών πρώτων αριθμών (εικασία του Goldbach).
$$\begin{aligned} \forall x((\text{even}(x) \wedge 4 < x) \rightarrow \\ \rightarrow \exists y \exists z(\text{prime}(y) \wedge \text{odd}(y) \wedge \text{prime}(z) \wedge \text{odd}(z) \wedge x = y \oplus z)) \end{aligned}$$
- Για κάθε φυσικό αριθμό (ϵ στω n), υπάρχει άλλος (ϵ στω m) που είναι ο μέγιστος μεταξύ εκείνων που το διπλάσιό τους δεν ξεπερνά τον αρχικό (δηλ. το n).
$$\forall n \exists m (2 \otimes m \leq n \wedge \forall k (2 \otimes k \leq n \rightarrow k \leq m))$$

ή ισοδύναμα $\forall n \exists m (P(m, n) \wedge \forall k (P(k, n) \rightarrow k \leq m))$
όπου $P(m, n) \equiv 2 \otimes m \leq n$

Παραδείγματα: Σύνολα

- Ερμηνεία με σύμπαν δυναμοσύνολο πεπερασμένου συνόλου S , 2-μελές κατηγορηματικό σύμβολο Q με ερμηνεία $Q(x, y) \equiv x \subseteq y$, και σταθερά c που ερμηνεύεται ως το κενό σύνολο (\emptyset).
 - Υπάρχει σύνολο που περιέχει (ως υποσύνολα) κάθε σύνολο. $\exists x \forall y Q(y, x)$
 - Το κενό σύνολο έχει μόνο ένα υποσύνολο, τον εαυτό του. $Q(c, c) \wedge \forall x(Q(x, c) \rightarrow x = c)$
 - Για κάθε ζευγάρι συνόλων υπάρχει κοινό υποσύνολο που είναι το μεγαλύτερο δυνατό (τομή συνόλων).
$$\forall x \forall y \exists z [Q(z, x) \wedge Q(z, y) \wedge \forall w (Q(w, x) \wedge Q(w, y) \rightarrow Q(w, z))]$$
 - Για κάθε ζευγάρι συνόλων υπάρχει κοινό υπερσύνολο που είναι το ελάχιστο δυνατό (ένωση συνόλων).
$$\forall x \forall y \exists z [Q(x, z) \wedge Q(y, z) \wedge \forall w (Q(x, w) \wedge Q(y, w) \rightarrow Q(z, w))]$$

Ερώτηση

□ Τι δηλώνουν οι παρακάτω προτάσεις;

- Αληθεύουν σε πεπερασμένο σύμπαν;
- Αληθεύουν σε άπειρο σύμπαν;

$$\begin{array}{c} \forall x R(x, x) \wedge \\ \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(y, x)) \wedge \\ \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow \neg R(x, y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \forall x R(x, x) \wedge \\ \forall x \forall y (R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \\ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \wedge \\ \forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x)) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \exists x \forall y R(x, y) \wedge \\ \exists x \forall y R(y, x) \end{array}$$

Προτάσεις και Κατηγορήματα

- Τύπος $\varphi(x)$ με **ελεύθερη μεταβλητή** x ορίζει σύνολο

$$A_\varphi = \{ a \in |A| : \varphi(a) \text{ αληθεύει στην } A \}$$

- $\varphi(x)$: ιδιότητα **στοιχείων της δομής** (όπως κατηγορήματα).
- Πρόταση ψ : ιδιότητα **της ίδιας της δομής**.
- Να ορίσετε έτσι τα $\{0\}$ και $\{1\}$ (χωρίς σταθερά 0, συνάρτηση').
 - x είναι ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης: $\forall y(x + y = y)$.
 - Η δομή έχει ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση: $\exists x \forall y(x + y = y)$.
 - x είναι ουδέτερο στοιχείο του πολ/μού: $\forall y(x \times y = y)$.
 - Η δομή έχει ουδέτερο στοιχείο για τον πολ/μό: $\exists x \forall y(x \times y = y)$.

Σημασιολογική Προσέγγιση

- $A |= \phi[v]$: στην ερμηνεία A , η **αποτίμηση v** επαληθεύει (ή ικανοποιεί) τον ϕ .
 - Αποτίμηση v καθορίζει τιμές **ελεύθερων μεταβλητών** του ϕ και μόνο.
- $A |= \phi$: ο ϕ ικανοποιείται από κάθε αποτίμηση στην ερμηνεία A .
 - Ο ϕ αληθής στην A ή η ερμηνεία A αποτελεί **μοντέλο** για τον ϕ .
- $|= \phi$: ο ϕ ικανοποιείται σε κάθε ερμηνεία.
 - Ο ϕ είναι (λογικά) **έγκυρος** (αντίστοιχο **ταυτολογίας**).
 - Ταυτολογίες «δίνουν» λογικά έγκυρους τύπους με συντακτική αντικατάσταση.
- **Έγκυρότητα / ικανοποιησιμότητα / αλήθεια ϕ** ελέγχεται με εφαρμογή του **ορισμού αλήθειας** του Tarski.

Ορισμός Tarski

- Ερμηνεύει λογικούς συνδέσμους και ποσοδείκτες.
- Ορίζει ότι ένας **τύπος φ αληθεύει** (σε μια ερμηνεία A , για μια αποτίμηση v) ανν **το νόημα του εκφράζει μια αλήθεια** στην A .
- Η έννοια $A \models \varphi[v]$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
 - $A \models (x = y)[v]$ ανν ($v(x) = v(y)$).
 - $A \models Q(x_1, \dots, x_n)[v]$ ανν ($(v(x_1), \dots, v(x_n)) \in Q^A$).
 - $A \models \neg\psi[v]$ ανν (**δεν ισχύει** ότι $A \models \psi[v]$).
 - $A \models (\psi \wedge \chi)[v]$ ανν ($A \models \psi[v]$ **και** $A \models \chi[v]$).
 - $A \models (\psi \vee \chi)[v]$ ανν ($A \models \psi[v]$ **ή** $A \models \chi[v]$).
 - $A \models (\psi \rightarrow \chi)[v]$ ανν (**όταν** $A \models \psi[v]$, **τότε** $A \models \chi[v]$).
 - $A \models (\psi \leftrightarrow \chi)[v]$ ανν ($A \models \psi[v]$ **ανν** $A \models \chi[v]$).
 - $A \models \forall x\psi[v]$ ανν (**για κάθε** $a \in |A|$, $A \models \psi[v(x|a)]$).
 - $A \models \exists x\psi[v]$ ανν (**υπάρχει** $a \in |A|$ **τέτοιο** ώστε $A \models \psi[v(x|a)]$).

Παραδείγματα

- Δεν ακολουθούμε τον φορμαλισμό του ορισμού Tarski, αλλά την ουσία του.
- Ελέγχουμε αν πρόταση **αληθεύει σε συγκεκριμένη ερμηνεία**.
 - Απλά «**αποκωδικοποιούμε**» την πρόταση (στην συγκεκριμένη ερμηνεία) και **εξηγούμε πειστικά** αν αληθεύει ή όχι.
- Αληθεύουν οι παρακάτω προτάσεις στη δομή των **φυσικών για $c = 0$ και $P(x, y) \equiv x \leq y$** ; Στην δομή των **ακεραίων**;
 - (α) $\forall x \forall y (P(x, c) \wedge P(c, y) \rightarrow P(x, y))$
 - (β) $\forall x (P(x, c) \rightarrow x = c)$
 - (α) αληθεύει σε **φυσικούς** και **ακέραιους**, (β) μόνο σε **φυσικούς**.

Λογική Εγκυρότητα

- Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι λογικά έγκυρες:
 - (i) $\exists x P(x) \vee \exists y Q(y) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$
 - (ii) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x))$
- 'Ότι μια πρόταση δεν είναι λογικά έγκυρη αποδεικνύεται με «αντιπαράδειγμα» (ερμηνεία που δεν την ικανοποιεί):
 - Για την (i), φυσικοί αριθμοί, $P(x)$ δηλώνει ότι x άρτιος, $Q(x)$ δηλώνει ότι x περιπτός.
- Λογική εγκυρότητα αποδεικνύεται με εφαρμογή ορισμού Tarski.
 - Για αυθαίρετη ερμηνεία A , πρόταση (ii) δηλώνει ότι:
αν για κάθε στοιχείο $a \in |A|$, $A \models P(a)$ και $A \models Q(a)$,
τότε για κάθε στοιχείο $a \in |A|$, $A \models P(a)$ ή $A \models Q(a)$.
 - Αυτό αληθεύει για κάθε δομή A .

Λογική Εγκυρότητα

- Νδο | = $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$
 - Έστω αυθαιρετη δομή A. A | = $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y) \dots$
 - ανν όταν (i) υπάρχει $a \in |A|$ τ.ω. για κάθε $\beta \in |A|$, A | = P(a, β), τότε (ii) για κάθε $\gamma \in |A|$, υπάρχει $\delta \in |A|$ τ.ω. A | = P(δ , γ).
 - Ισχύει, αφού για κάθε $\gamma \in |A|$, A | = P(a, γ) λόγω υπόθεσης.

Λογική Εγκυρότητα

- Νδο $| = \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x))$
 - Θεωρούμε αυθαιρετη δομή A . Πρέπει νδο:
 - Αν (i) υπάρχει $a \in |A|$: $A | = P(a) \rightarrow Q(a)$,
 - τότε (ii) αν για κάθε $\beta \in |A|$, $A | = P(\beta)$,
 - τότε (iii) υπάρχει $\gamma \in |A|$: $A | = Q(\gamma)$.
 - Αρκεί νδο αν ισχύουν τα (i) και (ii), τότε ισχύει και το (iii).
 - Λόγω (i): υπάρχει $a \in |A|$: $A | = P(a) \rightarrow Q(a)$.
 - Λόγω (ii): $A | = P(a)$.
 - Άρα $A | = Q(a)$.
 - Συνεπώς, αν ισχύουν τα (i) και (ii), υπάρχει στοιχείο του $|A|$ για το οποίο αληθεύει το Q στην ερμηνεία A .

Λογική Εγκυρότητα

- Να διερευνήσετε αν ο παρακάτω τύπος είναι λογικά έγκυρος:
$$[\forall x P(x, x) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y)] \rightarrow \neg \exists x \forall y P(x, y)$$
 - Αν σχέση P είναι ανακλαστική και αντισυμμετρική τότε σχέση P δεν έχει «ελάχιστο στοιχείο».
 - Δεν είναι λογικά έγκυρο, π.χ. φυσικοί με $P(x, y) \equiv x \leq y$.

Λογική Συνεπαγωγή

- 'Εστω οι τύποι (1) $\forall x(f(x) = x \leftrightarrow Q(x))$, και
(2) $\forall x(f(x) = x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$.
 - (α) Να βρείτε ποιος τύπος συνεπάγεται λογικά τον άλλο, και
 - (β) νδοι οι τύποι δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.
- Θδο (1) \models (2) (αλλά όχι το αντίστροφο).
- 'Εστω αυθαιρετη ερμηνεία A . Από ορισμό Tarski, αρκεί νδοι:
 - Αν (i) για κάθε $a \in |A|$, $A \models f(a) = a$ ανν $A \models Q(a)$,
τότε (ii.1) για κάθε $\beta \in |A|$, $A \models f(\beta) = \beta$ ανν
(ii.2) για κάθε $\gamma \in |A|$, $A \models Q(\gamma)$.
- Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:
 - Ισχύει (ii.2), δηλ. για κάθε $\gamma \in |A|$, $A \models Q(\gamma)$ ανν,
λογω (i), για κάθε $\beta \in |A|$, $A \models f(\beta) = \beta$, ανν ισχύει (ii.1).
 - Δεν ισχύει (ii.2), δηλ. υπάρχει $\delta \in |A|$, $A \models \neg Q(\delta)$, ανν,
λόγω (i), υπάρχει $\delta \in |A|$, $A \models f(\delta) \neq \delta$, ανν δεν ισχύει (ii.2).

Λογική Συνεπαγωγή

- Έστω οι τύποι (1) $\forall x(f(x) = x \leftrightarrow Q(x))$, και
(2) $\forall x(f(x) = x) \leftrightarrow \forall xQ(x)$.
 - (α) Να βρείτε ποιος τύπος συνεπάγεται λογικά τον άλλο, και
 - (β) νδο οι τύποι δεν είναι λογικά ισοδύναμοι.
- Ερμηνεία Α που επαληθεύει τον (2) αλλά όχι τον (1).
- $|A| = \{a, \beta\}$, $f(a) = a$, $f(\beta) = a$, και $Q(a) \Psi, Q(\beta) A$.
- Α μοντέλο για τον (2):
 - $A |= \neg \forall x(f(x) = x)$ και $A |= \neg \forall xQ(x)$
- Α όχι μοντέλο για τον (1):
 - Υπάρχει στοιχείο του $|A|$, το a , για το οποίο $f(a) = a$ αλλά $Q(a)$ δεν αληθεύει.

Λογική Συνεπαγωγή

- Δίνονται τρεις προτάσεις:
 - (α) $\forall x \forall y \forall z [P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)]$
 - Η σχέση P είναι **μεταβατική**.
 - (β) $\forall x \forall y [P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y]$
 - Η σχέση P είναι **αντισυμμετρική**.
 - (γ) $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$
 - Αν **κάθε στοιχείο P -σχετίζεται με κάποιο στοιχείο, υπάρχει στοιχείο με το οποίο P -σχετίζονται όλα τα στοιχεία.**
- $\{ (\alpha), (\beta) \} \models (\gamma);$
 - **Όχι**, π.χ. φυσικοί με $P(x, y) \equiv x \leq y$.
- $\{ (\alpha), (\gamma) \} \models (\beta);$
 - **Όχι**, π.χ. αν $P(x, y)$ αληθεύει πάντα.
- $\{ (\beta), (\gamma) \} \models (\alpha);$
 - **Όχι**, π.χ. σύμπαν = $\{0, 1, 2\}$ και $P(x, y)$ αληθεύει για $\{(0,1), (1,2)\}$.

Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

- Για κάθε τύπο φ , μπορούμε να βρούμε λογικά ισοδύναμο τύπο $\varphi^* \equiv Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \varphi'(x_1, \dots, x_n)$ όπου Q_i ποσοδείκτες και $\varphi'(x_1, \dots, x_n)$ ανοικτός τύπος.
 - φ^* αποτελεί **Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή (ΚΠΜ)** φ .
- Για υπολογισμό ΚΠΜ, χρησιμοποιούμε:
 - Νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών (μόνο αν x **δεν** εμφανίζεται ελεύθερη στον φ):
$$\forall x \psi(x) \rightarrow \varphi \equiv \exists x (\psi(x) \rightarrow \varphi)$$
$$\exists x \psi(x) \rightarrow \varphi \equiv \forall x (\psi(x) \rightarrow \varphi)$$
$$\varphi \rightarrow \forall x \psi(x) \equiv \forall x (\varphi \rightarrow \psi(x))$$
$$\varphi \rightarrow \exists x \psi(x) \equiv \exists x (\varphi \rightarrow \psi(x))$$
 - Νόμους άρνησης ποσοδεικτών:
$$\neg \exists x \varphi(x) \equiv \forall x \neg \varphi(x)$$
$$\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)$$
 - Νόμους κατανομής ποσοδεικτών:
$$\forall x (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x)$$
$$\exists x (\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x)$$

Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

□ Να βρείτε μια ΚΠΜ του τύπου

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x, y) \rightarrow \neg \exists z Q(x, z)) \rightarrow (\forall x R(x) \wedge \forall y S(y)) \\ & \equiv \forall x(P(x, y) \rightarrow \neg \exists z Q(x, z)) \rightarrow \forall w(R(w) \wedge S(w)) \\ & \equiv \forall w[\forall x(P(x, y) \rightarrow \neg \exists z Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ & \equiv \forall w[\forall x(P(x, y) \rightarrow \forall z \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ & \equiv \forall w \exists x[(P(x, y) \rightarrow \forall z \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ & \equiv \forall w \exists x[\forall z(P(x, y) \rightarrow \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \\ & \equiv \forall w \exists x \exists z[(P(x, y) \rightarrow \neg Q(x, z)) \rightarrow (R(w) \wedge S(w))] \end{aligned}$$