Σύνολα

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ορισμός Συνόλου

- Σύνολο είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων.
  - Π.χ. {Δημήτρης, Ανδρέας, Άρης}, {α, β}, {α, {α}, {{α}}},
    N = {0, 1, ... }, {1, 3, 5, 7, ... }, {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...}
  - Αντικείμενα όχι κατ' ανάγκη ομοειδή
    π.χ. {Δημήτρης, 1, a, 1041, {α, β, γ}, {{}}, PC1}
  - Μέλη ή στοιχεία του συνόλου: $x \in \{x, y, z\}$, $\alpha \notin \{x, y, z\}$
  - Κάθε αντικείμενο είτε είναι μέλος ενός συνόλου είτε όχι.
- Σύνολο ορίζεται:
  - με απαρίθμηση των στοιχείων του, π.χ. {α, β, γ}
  - με χαρακτηριστική ιδιότητα των στοιχείων του,
    π.χ. $E = \{x \in N$: x άρτιος$\}$, $A = \{x \in U: P(x)\}$
  - ως αποτέλεσμα πράξεων σε σύνολα που έχουν ήδη ορισθεί.

Ορισμός Συνόλου

- Στοιχεία ενός συνόλου:
  - Δεν επαναλαμβάνονται, π.χ. {α, β} και όχι {α, α, β}.
    - Επανάληψη στοιχείων: **πολυσύνολα**.
  - Δεν υπάρχει διάταξη, π.χ. {α, β, γ} = {γ, β, α} = {β, α, γ}
- **Πληθικός αριθμός** συνόλου Α: #στοιχείων Α, |Α|.
  - Πεπερασμένα και άπειρα σύνολα.
- Σύνολα Α και Β **ταυτίζονται** (Α = Β) ανν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

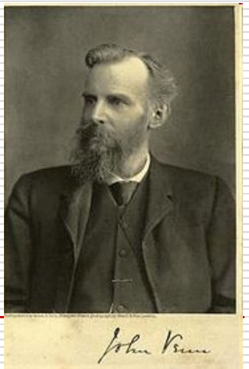
Υποσύνολα και Κενό Σύνολο

- A υποσύνολο B (γράφουμε $A \subseteq B$) αν κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B:
  - Π.χ. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, ..., z\}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\{2, 4, 6, 8, 10\} \not\subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
  - Για κάθε σύνολο A, $A \subseteq A$.
  - $A = B$ ανν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.
  - Αν $A \subseteq B$, τότε ισχύει ότι $|A| \leq |B|$
  - A γνήσιο υποσύνολο B ($A \subset B$): $A \subseteq B$ και $A \neq B$.
  - Υπάρχουν σύνολα A, B, τ.ω. $B \subset A$ και **ισάριθμα**;
  - Σύνολο A **άπειρο** ανν υπάρχει $B \subset A$ τ.ω. A και B είναι **ισάριθμα**(!)
- **Κενό** σύνολο ({ } ή $\emptyset$): σύνολο χωρίς κανένα στοιχείο.
  - $|\emptyset| = 0$.
  - Για κάθε σύνολο A, $\emptyset \subseteq A$ (απόδειξη;).
  - Κενό σύνολο είναι μοναδικό (απόδειξη;).

Δυναμοσύνολο

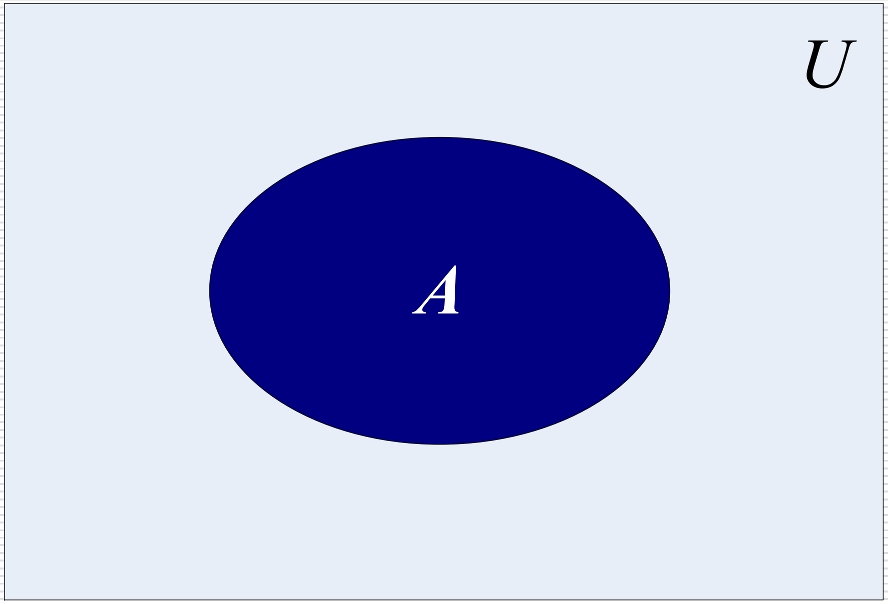
- **Δυναμοσύνολο** συνόλου Α, $P(A)$ ή 2^A, είναι σύνολο με στοιχεία όλα τα υποσύνολα του Α: $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$
  - $P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
  - $2^{\{\alpha, \beta, \gamma\}} = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$
  - $\emptyset \in P(A)$ και $A \in P(A)$, για κάθε σύνολο Α.
  - $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. $2^{P(\emptyset)} = ?$. $2^{P(\{\emptyset\})} = ?$.
- Για κάθε πεπερασμένο σύνολο Α, $|2^A| = 2^{|A|}$.
  - Απόδειξη με επαγωγή και με συνδυαστικό επιχείρημα.
- $\subseteq$ και $\in$. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;
  - $2 \in \{1, 2, 3\}$. $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$. $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$.
  - $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$. $\{2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$. $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$.

Διαγράμματα Venn

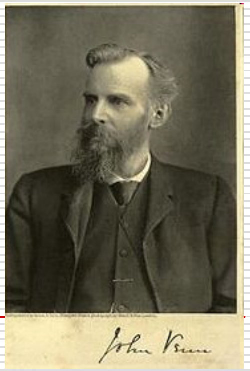


- Αναπαριστούν σύνολα και σχέσεις μεταξύ συνόλων.

Ορθογώνιο αναπαριστά σύμπαν *U* που
περιέχει όλα τα αντικείμενα.
Ελλείψεις αναπαριστούν σύνολα υπό μελέτη.

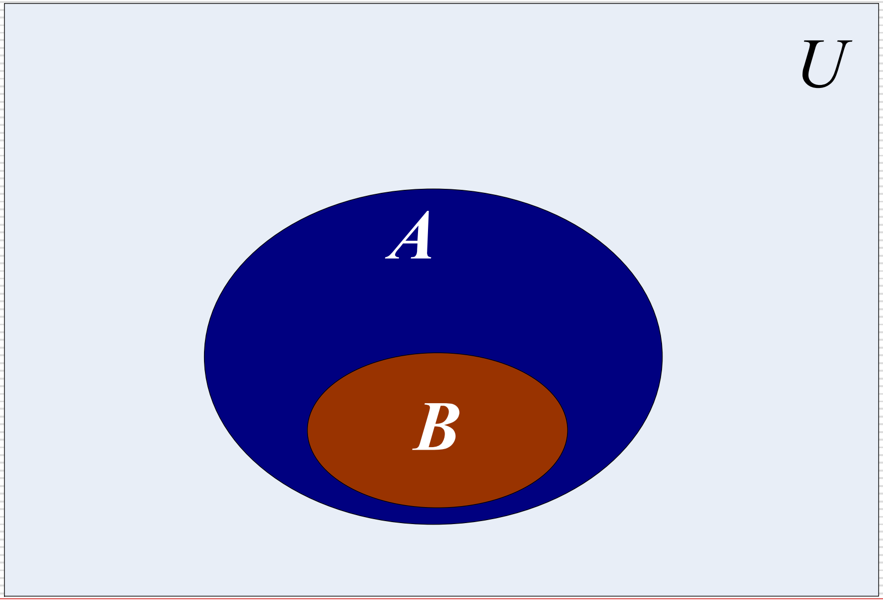


Διαγράμματα Venn

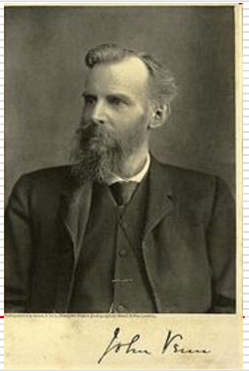


- Αναπαριστούν σύνολα και σχέσεις μεταξύ συνόλων.

B (γνήσιο) υποσύνολο A

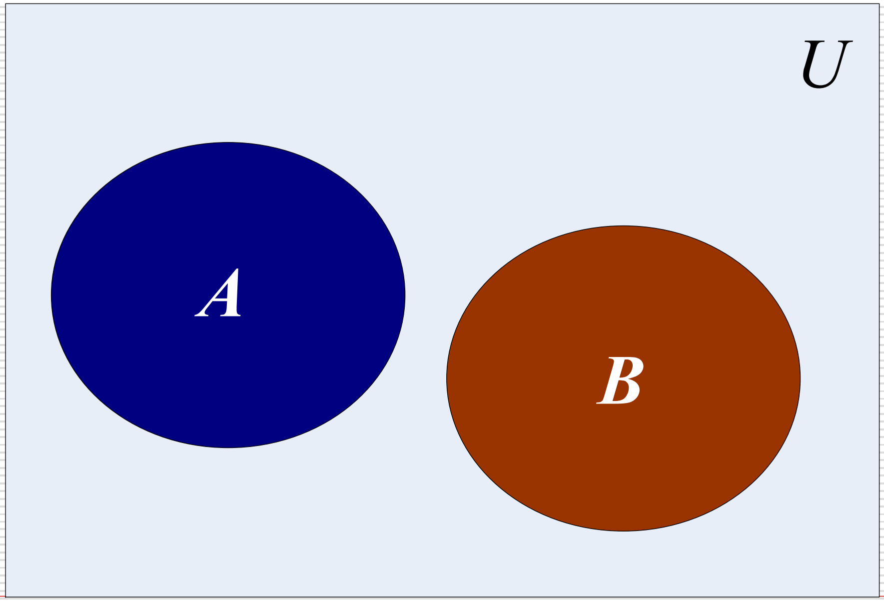


Διαγράμματα Venn



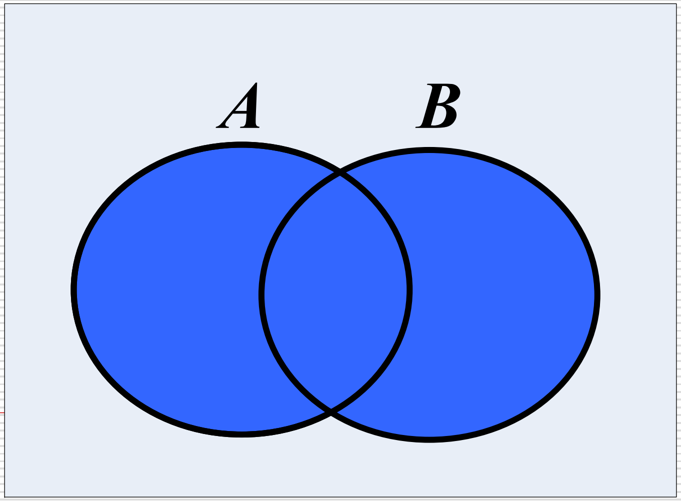
- Αναπαριστούν σύνολα και σχέσεις μεταξύ συνόλων.

A και *B* δεν έχουν κοινά στοιχεία
(ξένα μεταξύ τους)



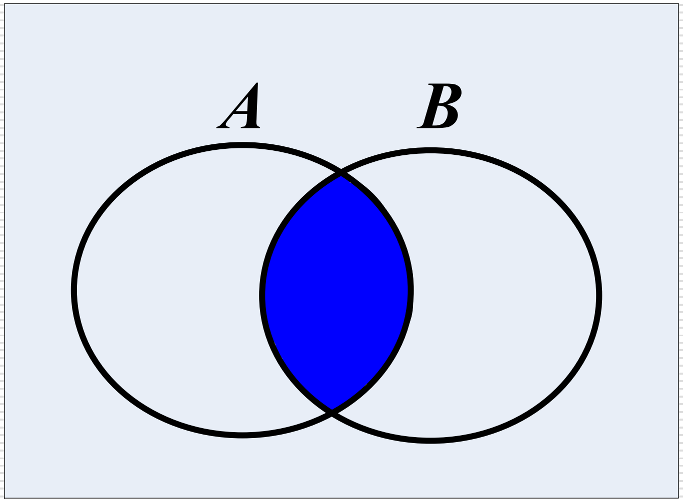
Πράξεις Συνόλων

- **Ένωση** συνόλων A και B, $A \cup B$:
  - Σύνολο με στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B (ή και στα δύο).
  - Π.χ. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
    $\{0, 2, 4, 6, \ldots\} \cup \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = N$.
  - Αντιμεταθετική, προσεταιριστική, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$, ορίζεται η ένωση $n \geq 2$ συνόλων.
  - $A \subseteq B$ ανν $A \cup B = B$.
    Ειδικά $A \cup U = U$.
  - $A \subseteq A \cup B$, για κάθε B.
  - Αν $A, B \subseteq C$, τότε $A \cup B \subseteq C$.



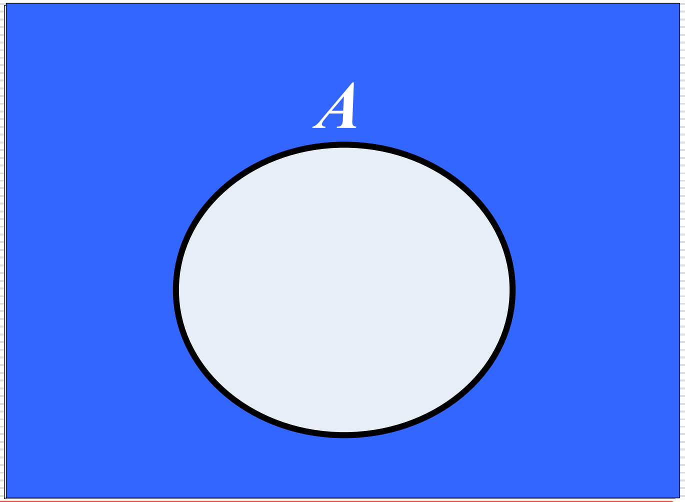
Πράξεις Συνόλων

- **Τομή** συνόλων A και B, $A \cap B$:
  - Σύνολο με κοινά στοιχεία A και B.
  - Π.χ. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.
    $\{0, 2, 4, 6, \ldots\} \cap \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \emptyset$
  - Αντιμεταθετική, προσεταιριστική, $A \cap U = A$, $A \cap A = A$, ορίζεται η τομή $n \geq 2$ συνόλων.
  - $A \subseteq B$ ανν $A \cap B = A$.
    Ειδικά $A \cap \emptyset = \emptyset$.
  - $A \cap B \subseteq A$, για κάθε B.
    Αν $A, B \subseteq C$, τότε $A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq C$.
  - Επιμεριστική ιδιότητα τομής ως προς ένωση και ένωσης ως προς τομή.
  - Αν $A \cap B = \emptyset$, A και B **ξένα** ή διαζευγμένα σύνολα.



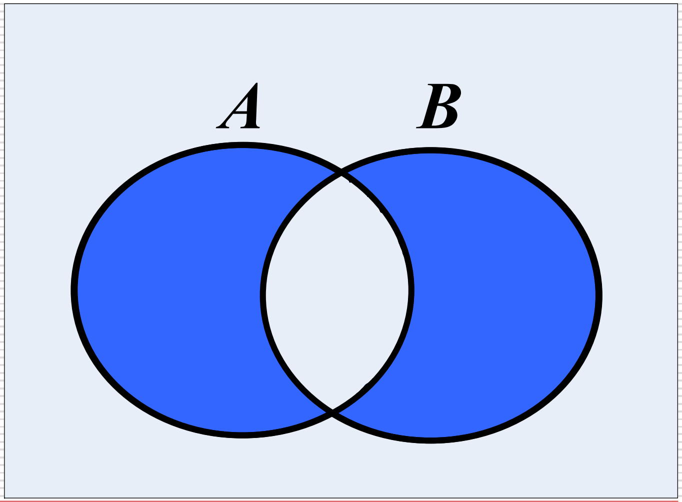
Πράξεις Συνόλων

- **Διαφορά** συνόλου A από σύνολο B, A – B:
  - Σύνολο με στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B.
  - Π.χ. {1, 2, 3} – {2, 3, 4} = {1},
    {2, 3, 4} – {1, 2, 3} = {4},
    N – {0, 2, 4, 6, ...} = {1, 3, 5, 7, ...}.
  - Όχι αντιμεταθετική!
- **Συμπλήρωμα** συνόλου A, $\overline{A}$:
  - Σύνολο με στοιχεία που δεν ανήκουν στο A, U – A.
  - Συμπλήρωμα $\varnothing$ = U.
    Συμπλήρωμα U = $\varnothing$.
  - $A - B = A \cap \overline{B}$



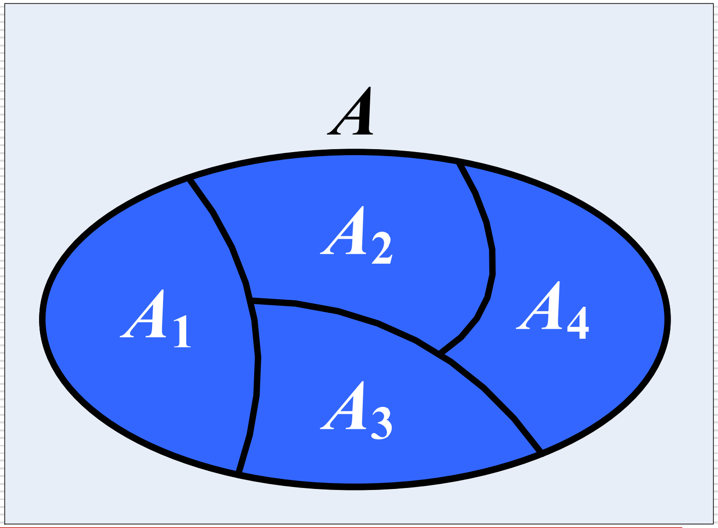
Πράξεις Συνόλων

- **Συμμετρική διαφορά** συνόλων A και B, $A \oplus B$:
  - Σύνολο με στοιχεία που ανήκουν είτε στο A είτε στο B αλλά όχι και στα δύο.
  - $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$



Διαμέριση Συνόλου

- Μη κενό σύνολο Α. Συλλογή $A_1, A_2, \ldots, A_n$ μη κενών υποσυνόλων του Α αποτελεί **διαμέριση** του Α ανν:
  - $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
  - Τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.
- Παραδείγματα:
  - Τα {0, 2, 4, ... } και {1, 3, 5, ...} αποτελούν διαμέριση του N.
  - Τα {-1, -2, -3, ...}, {0}, {1, 2, 3, ...} αποτελούν διαμέριση του Z.



Ιδιότητες Πράξεων Συνόλων

Αντιμεταθετική	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Προσεταιριστική	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Επιμεριστική	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Κανόνας συμπλήρωσης	$\overline{\overline{A}} = A$

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (II)

Ουδέτερο στοιχείο	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$
Απορροφητικό στοιχείο	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$
Αυτοπάθεια	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Κανόνας Απορρόφησης	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Κανόνας De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Πράξεις Συνόλων

- Αντιστοιχία πράξεων συνόλων με λογικούς συνδέσμους.
  - Στοιχεία συνόλου Α έχουν ιδιότητα (α).
  - Στοιχεία συνόλου Β έχουν ιδιότητα (β).
  - Π.χ. στοιχεία συνόλου $A \cup B$ έχουν ιδιότητα $(\alpha) \vee (\beta)$.
- Ιδιότητες πράξεων συνόλων και σχέσεων μεταξύ συνόλων ελέγχονται / αποδεικνύονται με membership tables.
  - Πίνακες που εξετάζουν όλα τα ενδεχόμενα για το που ανήκει ένα στοιχείο.
  - Ισοδύναμο των πινάκων αλήθειας.

Παράδειγμα Membership Table

- Παράδειγμα membership table για επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**

Παραδείγματα

- Ν.δ.ο. $(A \cup B) \cap \overline{B} = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
  - Αρκεί ν.δ.ο. A – B = A ανν A ∩ B = ∅, αφού

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap \overline{B} &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cap \overline{B} \\ &= A - B\end{aligned}$$

- Ν.δ.ο. $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}} = A$

$$\overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}} = \overline{\overline{A}} = A$$

- Ν.δ.ο. P(A) ∩ P(B) = P(A ∩ B).
- Ν.δ.ο. P(A) ∪ P(B) ⊆ P(A ∪ B). Να δώσετε παράδειγμα όπου το 1^{ο} είναι γνήσιο υποσύνολο του 2^{ου}.

Παραδείγματα

- Ν.δ.ο. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (\overline{B \cup C})\end{aligned}$$

- Ν.δ.ο. $(A - B) - C = (A - C) - B$
  - $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
    $= A - (C \cup B)$
    $= (A - C) - B$

Παραδείγματα

- Ν.δ.ο. (A – B) – C = (A – C) – (B – C)

$$
\begin{aligned}
(A - C) - (B - C) &= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) \\
&= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C) \\
&= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (\overbrace{A \cap \overline{C} \cap C}^{=\emptyset}) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \\
&= (A - B) - C
\end{aligned}
$$