

# Σχέσεις Μερικής Διάταξης

---

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

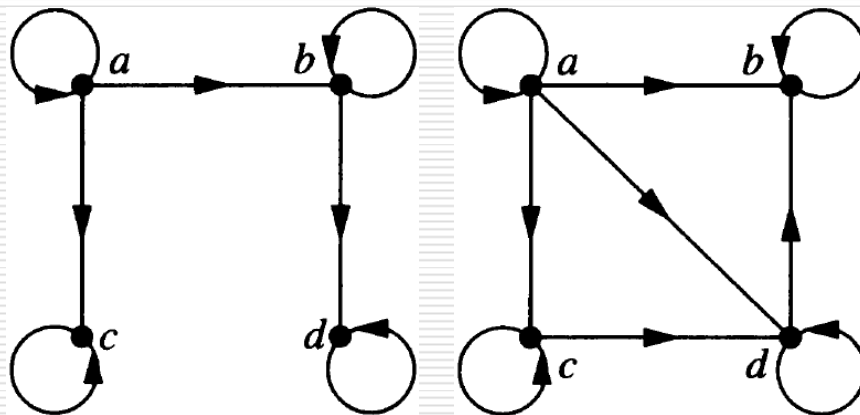
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Σχέση Μερικής Διάταξης

- Σχέση **Μερικής Διάταξης** (ή μερική διάταξη): ανακλαστική, αντισυμμετρική, και μεταβατική.
  - Αριθμοί:  $a \leq \beta$  (αλλά όχι  $a < \beta$ ),  $a \mid \beta$ ,
  - Σύνολα (σχέση στο  $P(S)$ ):  $A \subseteq B$ .
- Ποιες από τις παρακάτω είναι σχέσεις μερικής διάταξης;



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



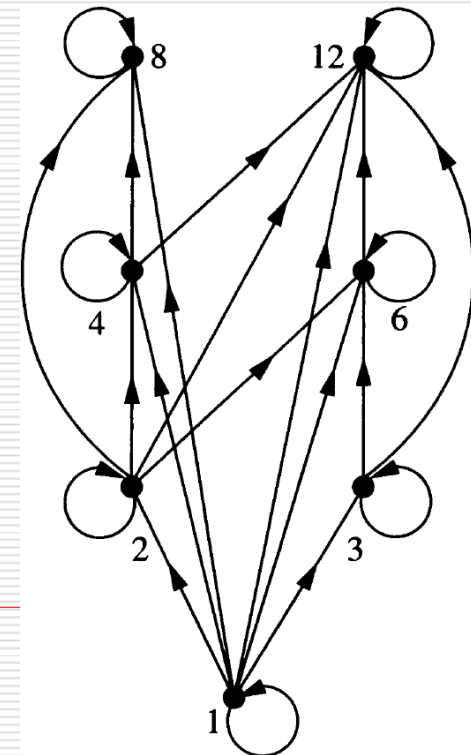
# Διατεταγμένα Σύνολα

---

- Σχέση **μερικής διάταξης**: γράφουμε  $a \leq \beta$  (αντί  $(a, \beta) \in R$ ).
- Σύνολο  $A$  με σχέση μερικής διάταξης  $\leq$  :  
**μερικώς** διατεταγμένο σύνολο  $(A, \leq)$  (ή **poset**).
  - $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{N}^*, |)$ ,  $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ , (Άνθρωποι, Πρόγονος).
- Αν  $a \leq \beta$  ή  $\beta \leq a$ ,  $a$  και  $\beta$  **συγκρίσιμα**. Διαφορετικά **μη συγκρίσιμα**.
  - $(\mathbb{N}^*, |)$ : 3 και 9 συγκρ., 5 και 7 όχι.  $(P(\mathbb{N}), \subseteq)$ :  $\{1\}$  και  $\{2\}$  όχι.
- Poset  $(A, \leq)$  και **όλα** τα ζεύγη στοιχείων είναι **συγκρίσιμα**:  
**ολικά** διατεταγμένο σύνολο (ολική διάταξη ή **αλυσίδα**).
  - $(A, \leq)$  και  $B \subseteq A$  ώστε  $(B, \leq)$  ολικά διατεταγμένο: **B αλυσίδα** (του  $A$ ).
  - **Πεπερασμένη** (μη κενή) αλυσίδα έχει **μέγιστο** και **ελάχιστο** στοιχείο.
- $(A, \leq)$  και  $B \subseteq A$  ώστε στο  $(B, \leq)$  **κανένα** ζεύγος **συγκρίσιμο**:  
**B αντιαλυσίδα** (του  $A$ ).

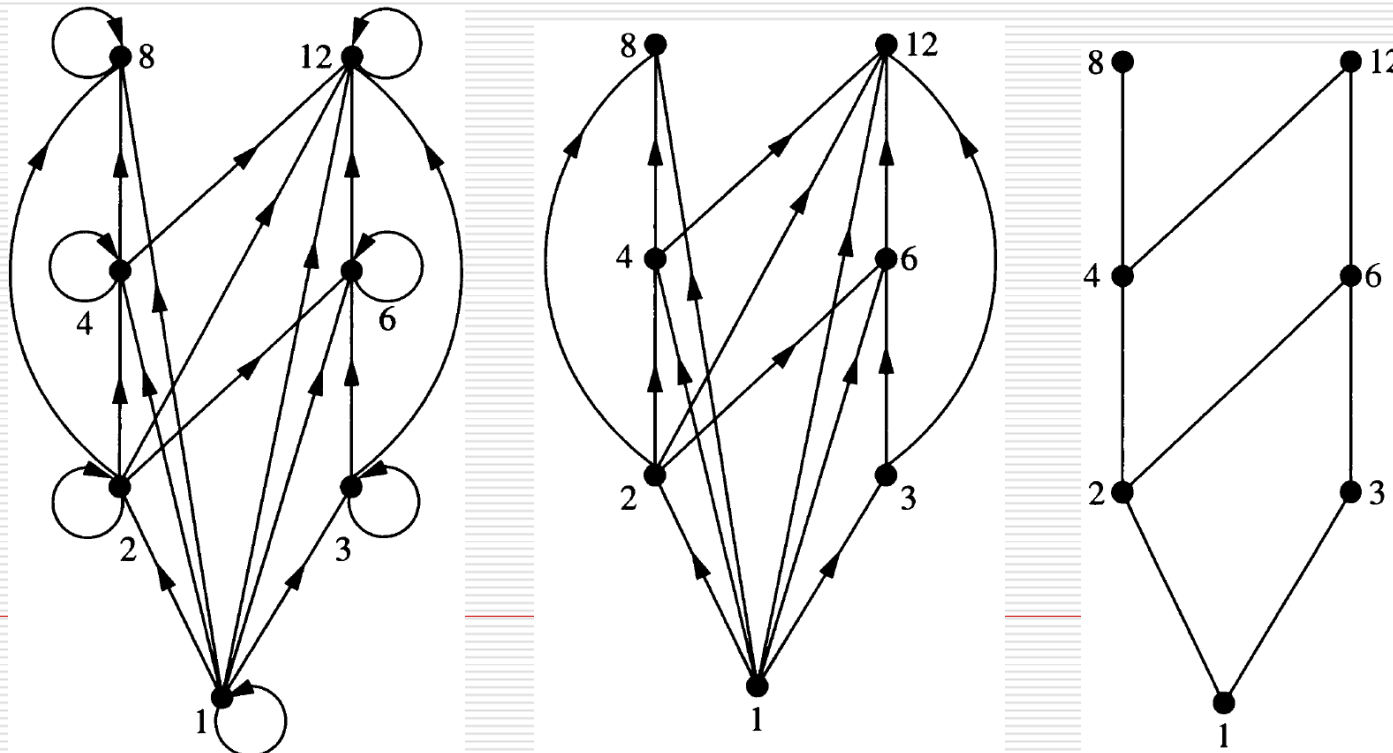
# Ακυκλικά Γραφήματα

- Κατευθυνόμενο Ακυκλικό Γράφημα (ΚΑΓ, DAG) **δεν έχει κύκλους**, μπορεί να έχει **ανακυκλώσεις**.
  - Συχνά αναπαριστούν **εξαρτήσεις δραστηριοτήτων, εργασιών**.
- R σχέση που αντιστοιχεί σε ΚΑΓ. Η **ανακλαστική μεταβατική κλειστότητα S** της R είναι σχέση **μερικής διάταξης**.  $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$ 
  - Αν  $a \neq \beta$ ,  $(a, \beta), (\beta, a) \in S$ , έχουμε **κύκλο** (στην R).
  - Άρα ΑΜΚ της R είναι **αντισυμμετρική**.
- Κάθε **μερική διάταξη** αντιστοιχεί σε ΚΑΓ.
  - **Μεταβατική ιδιότητα: κύκλος αν όχι αντισυμμετρική**.
- Μορφή ΚΑΓ για σχέσεις ολικής διάταξης;
- **Αλυσίδες** αντιστοιχούν σε **μονοπάτια** ΚΑΓ.  
**Αντιαλυσίδες** σε **ανεξάρτητα σύνολα** ΚΑΓ.

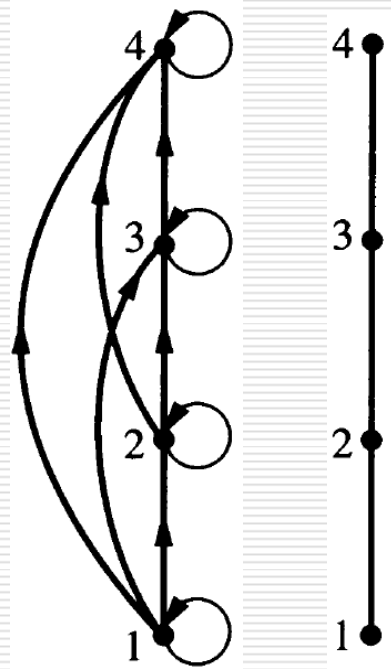


# Διαγράμματα Hasse

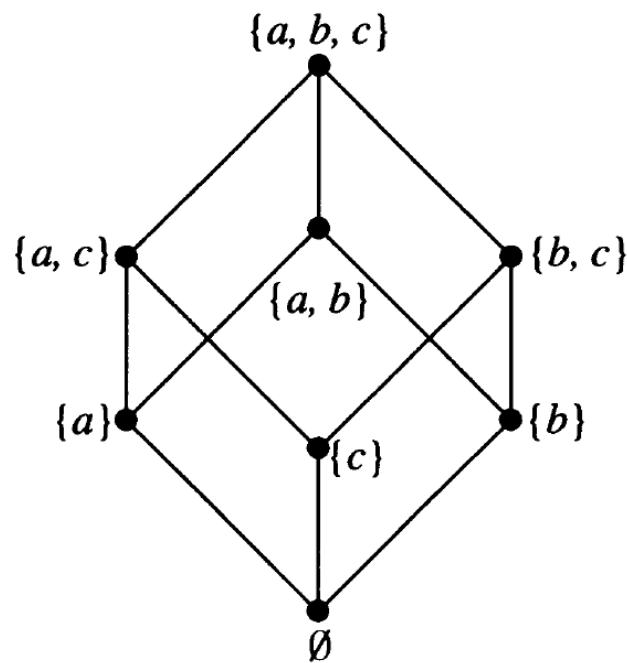
- Απέριττοι γράφοι για αναπαράσταση μερικών διατάξεων.
  - Ξεκινάμε από ΚΑΓ και αφαιρούμε ανακυκλώσεις (εννοούνται).
  - Αφαιρούμε «μεταβατικές» ακμές (μόνο «βασικές» ακμές):
    - Για κάθε  $a - \gamma$  διαδρομή μήκους  $\geq 2$ , αφαιρούμε ακμή  $(a, \gamma)$ .
  - Για κάθε ακμή  $(a, \beta)$ ,  $\beta$  πάνω από  $a$  και αφαιρούμε φορά (βέλος).



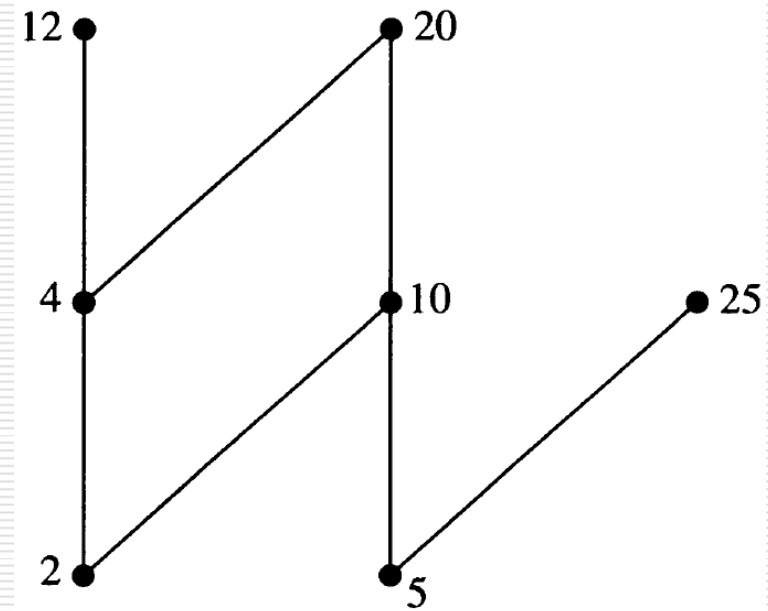
# Διαγράμματα Hasse



$(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$



$(\mathcal{P}\{a, b, c\}, \subseteq)$



$(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$

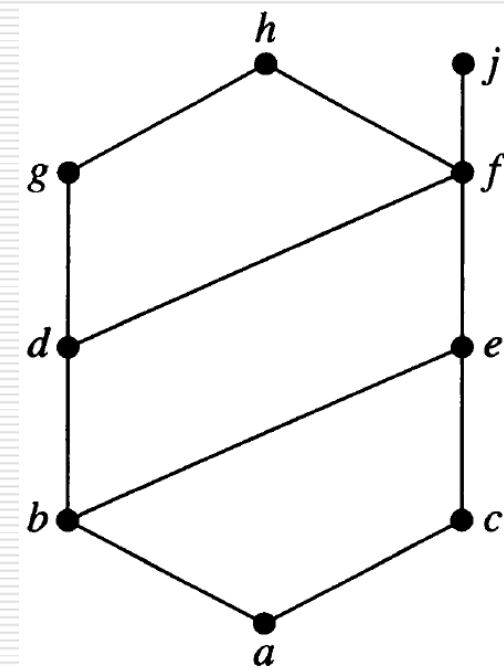
# Μέγιστα και Ελάχιστα Στοιχεία

---

- α **maximal** στοιχείο  $(A, \leq)$  αν **δεν υπάρχει**  $\beta \neq \alpha$  με  $\alpha \leq \beta$ .
- α **minimal** στοιχείο  $(A, \leq)$  αν **δεν υπάρχει**  $\beta \neq \alpha$  με  $\beta \leq \alpha$ .
  - $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$ : maximal 8 και 12, minimal 1.
  - $(\{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}, |)$ : maximal 12, 20, 25, minimal 2, 5.
  - $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$ : maximal  $\{a, b, c\}$  και minimal  $\emptyset$ .
- α **μέγιστο** στοιχείο  $(A, \leq)$  αν **μοναδικό maximal**,  $\forall \beta (\beta \leq \alpha)$ .
- α **ελάχιστο** στοιχείο  $(A, \leq)$  αν **μοναδικό minimal**,  $\forall \beta (\alpha \leq \beta)$ .

# Άνω και Κάτω Φράγμα

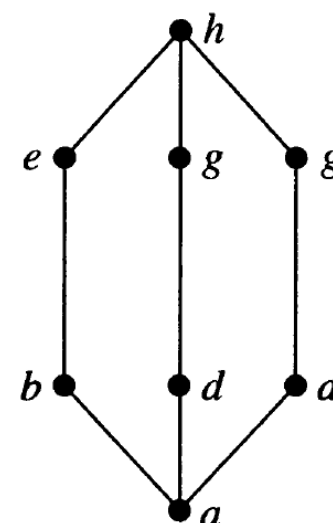
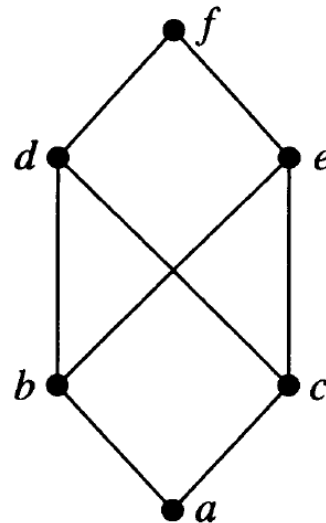
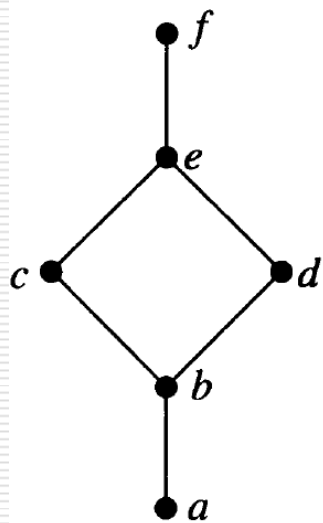
- α άνω φράγμα στοιχείων  $B \subseteq A$ , αν για κάθε  $\beta \in B$ ,  $\beta \leq \alpha$ .
- α κάτω φράγμα στοιχείων  $B \subseteq A$ , αν για κάθε  $\beta \in B$ ,  $\alpha \leq \beta$ .
  - Άνω για  $\{a, b, c\}$ :  $e, f, j, h$ . Κάτω:  $a$ .
  - Άνω για  $\{j, h\}$ : όχι. Κάτω:  $f, d, e, b, c, a$ .
- α ελάχιστο άνω φράγμα  $B \subseteq A$  (sup): α άνω φράγμα  $B$  και για κάθε  $\beta$  άνω φράγμα  $B$ ,  $\alpha \leq \beta$ .
- α μέγιστο κάτω φράγμα  $B \subseteq A$  (inf): α κάτω φράγμα  $B$  και για κάθε  $\beta$  κάτω φράγμα  $B$ ,  $\beta \leq \alpha$ .
- Αν υπάρχουν, είναι μοναδικά.
  - Ελάχιστο άνω φράγμα  $a, \beta$  στο  $(\mathbb{N}, |)$ : ΕΚΠ( $a, \beta$ ).
  - Μέγιστο κάτω φράγμα  $a, \beta$  στο  $(\mathbb{N}, |)$ : ΜΚΔ( $a, \beta$ ).
  - Ελάχιστο άνω φράγμα  $A, B$  στο  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ :  $A \cup B$ .
  - Μέγιστο κάτω φράγμα  $A, B$  στο  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ :  $A \cap B$ .





# Δικτυωτά (Lattices)

- $(A, \leq)$  είναι **δικτυωτό** (lattice) αν **κάθε ζεύγος** στοιχείων **έχει** ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα.
- Ποια από τα παρακάτω είναι δικτυωτά;
  - Είναι δικτυωτά τα  $(\mathbb{N}, |)$ ,  $(P(S), \subseteq)$ ;
  - Είναι δικτυωτό το  $(\{1, 2, \dots, k\}, |)$ ;



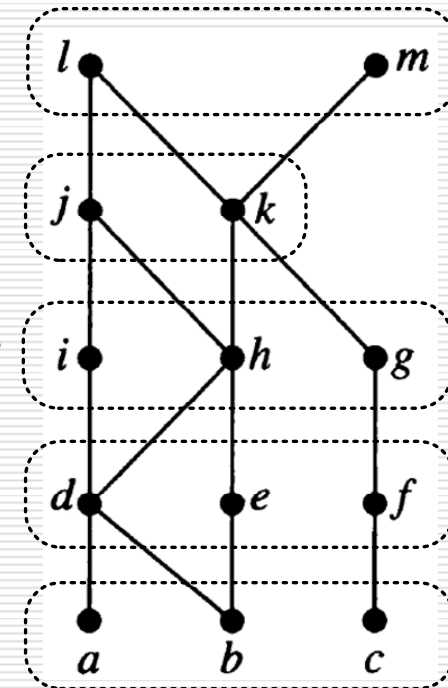
# Ένα Υπολογιστικό Πρόβλημα

---

- Δίνεται μία ακολουθία  $N$  θετικών φυσικών.
  - Να υπολογισθεί ο μικρότερος αριθμός της ακολουθίας που είναι **μικρότερος ή ίσος** όλων των **προηγούμενων** του.
  - Να υπολογισθεί ο μικρότερος αριθμός της ακολουθίας που **διαιρεί ακριβώς** όλους τους **προηγούμενους** του.

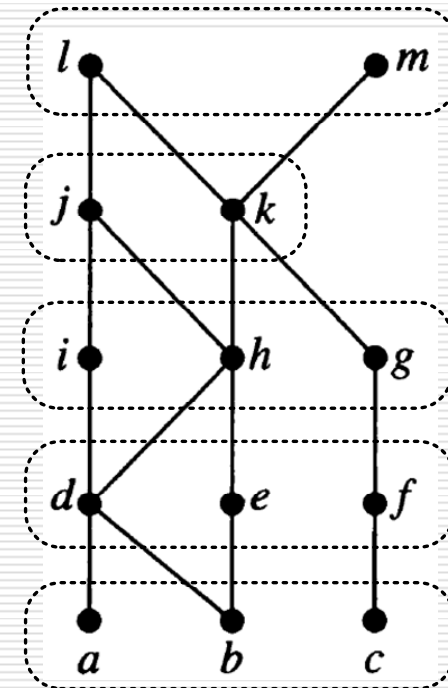
# Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες

- Α σύνολο μαθημάτων,  $(\alpha, \beta) \in R$  αν  $\alpha$  προαπαιτούμενο  $\beta$ .
  - Αντισυμμετρική και μεταβατική: **σχέση προτεραιότητας.**
  - Ανακλαστική κλειστότητα  $R$ : **σχέση μερικής διάταξης.**
- Μήκος μεγαλύτερης αλυσίδας: **ελάχιστος #εξαμήνων** για πτυχίο.
- Μέγεθος μεγαλύτερης αντιαλυσίδας: **μέγιστος #μαθημάτων** στο ίδιο **εξάμηνο.**
- Αν **μακρύτερη αλυσίδα** στο  $(A, \leq)$  έχει μήκος  $k \geq 1$ , στοιχεία  $A$  **διαμερίζονται σε  $k$  αντιαλυσίδες.**
- Αν **μεγαλύτερη αντιαλυσίδα** στο  $(A, \leq)$  έχει μέγεθος  $k \geq 1$ , στοιχεία  $A$  **διαμερίζονται σε  $k$  αλυσίδες.**



# Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες

- Αν μακρύτερη αλυσίδα στο  $(A, \leq)$  έχει μήκος  $k \geq 1$ , στοιχεία  $A$  διαμερίζονται σε  $k$  αντιαλυσίδες.
  - Απόδειξη με επαγωγή.
  - Βάση  $k = 1$ : Αν μακρύτερη αλυσίδα έχει 1 στοιχείο, όλα τα στοιχεία αποτελούν 1 αντιαλυσίδα.
  - Επαγωγική υπόθεση: σε κάθε  $(A, \leq)$  με μακρύτερη αλυσίδα μήκους  $k$ , διαμέριση  $A$  σε  $k$  αντιαλυσίδες.
  - Επαγωγικό βήμα:
    - $(A, \leq)$  με μακρύτερη αλυσίδα μήκους  $k+1$ .
    - Μ σύνολο maximal στοιχείων: Αντιαλυσίδα με 1 στοιχείο (τελευταίο) σε κάθε αλυσίδα.
    - $(A - M, \leq)$  έχει μακρύτερη αλυσίδα μήκους  $k$ .
    - Διαμέριση  $A - M$  σε  $k$  αντιαλυσίδες.
    - Διαμέριση  $A$  σε  $k+1$  αντιαλυσίδες.



# Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες

---

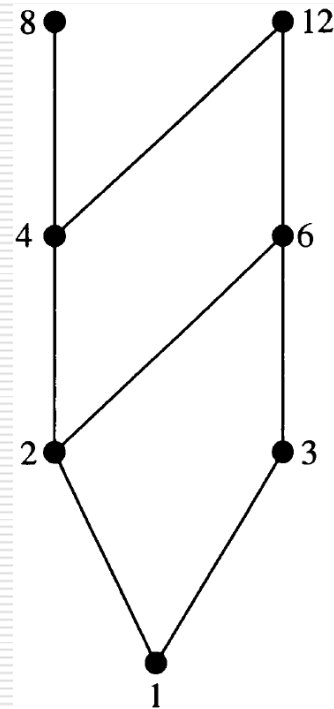
- Αν μακρύτερη αλυσίδα στο  $(A, \leq)$  έχει μήκος  $k \geq 1$ , στοιχεία  $A$  διαμερίζονται σε  $k$  αντιαλυσίδες.
  - Αν  $|A| \geq nm+1$ , τότε είτε αλυσίδα μήκους  $\geq n+1$  είτε αντιαλυσίδα μεγέθους  $\geq m+1$ .
- Σε σύνολο  $nm+1$  ανθρώπων, είτε αλυσίδα απογόνων μήκους  $m+1$  είτε  $n+1$  άνθρωποι χωρίς σχέση προγόνου-απογόνου.
  - Αν όλες αλυσίδες μήκους  $\leq m$ , διαμέριση σε  $\leq m$  αντιαλυσίδες.  
Αν όλες αντιαλυσίδες μεγέθους  $\leq n$ , #ανθρώπων  $\leq nm$ .
- Σύνολο  $S$  με  $n^2+1$  διαφορετικούς θετικούς φυσικούς:
  - Για κάθε  $A \subseteq S$ ,  $|A| = n+1$ , υπάρχουν  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ , με  $x \mid y$ .
  - Νδο υπάρχει  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\} \subseteq S$  όπου  $x_i \mid x_{i+1}$ , για κάθε  $i = 1, \dots, n$ .
- Πρέπει νδο στο poset  $(S, \mid)$ , υπάρχει αλυσίδα μήκους  $\geq n+1$ .
  - Μεγαλύτερη αντιαλυσίδα έχει μέγεθος  $\leq n$ .
  - Άρα υπάρχει αλυσίδα μήκους  $\geq n+1$ .

# Παράδειγμα και Αρχή Περιστερών

- Σε κάθε ακολουθία  $n^2+1$  διαφορετικών αριθμών, είτε αύξουσα υπακολουθία μήκους  $n+1$  είτε φθίνουσα υπακολ. μήκους  $n+1$ .
  - Υπακολουθία προκύπτει με διαγραφή κάποιων αριθμών.
- Αύξουσα υπακολουθία αντιστοιχεί σε αλυσίδα, και φθίνουσα υπακολουθία αντιστοιχεί σε αντιαλυσίδα, για μερική διάταξη  $\leq$ .
- Διαφορετικά: Αντιστοιχούμε αριθμό  $a_k$  στο  $(x_k, y_k)$ .
  - $x_k (y_k)$ : μήκους μεγαλύτερης αύξουσας (φθίνουσας) υπακολουθίας που αρχίζει στη θέση  $k$ .
- Αν όλα  $x_k \leq n$  και όλα  $y_k \leq n$ , #ζευγών  $\leq n^2$ .
  - Αρχή περιστερών: υπάρχουν δύο αριθμοί  $a_k$  και  $a_s$  ( $k < s$ ) που αντιστοιχούνται στο ίδιο ζεύγος  $(x, y)$ .
  - Άτοπο: αν  $a_k < a_s$ , τότε  $x_k > x_s$ , ενώ αν  $a_k > a_s$ , τότε  $y_k > y_s$ .

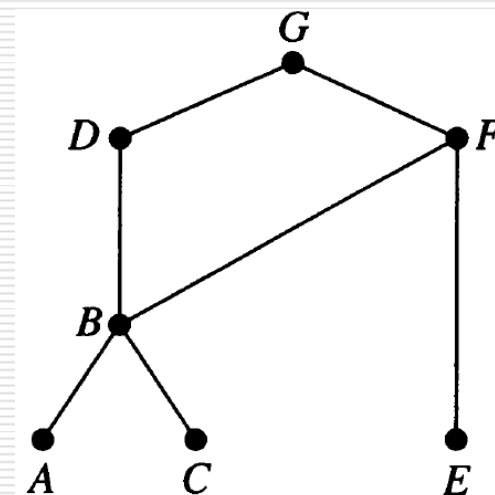
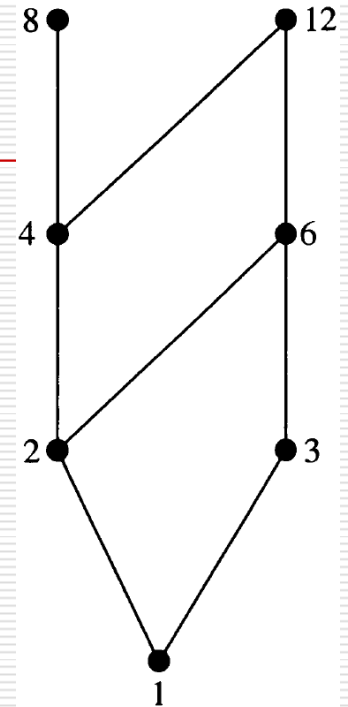
# Τοπολογική Διάταξη

- Ολική διάταξη  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  συμβατή με μερική διάταξη  $(A, \leq)$ .
  - Συμβατότητα: Για κάθε  $i < j$ , είτε  $a_i \leq a_j$  είτε  $a_i, a_j$  μη συγκρίσιμα.
  - Γραμμική διάταξη κορυφών ΚΑΓ ώστε ακμές (εκτός ανακυκλώσεων) κατευθύνονται από αριστερά προς δεξιά.
- $(A, \leq)$ ,  $A$  πεπερασμένο, επιδέχεται τοπολογικής διάταξης.
  - Γράφος είναι ΚΑΓ ανν επιδέχεται τοπολογικής διάταξης.
- $(A, \leq)$ ,  $A$  πεπερασμένο, έχει  $\geq 1$  minimal στοιχείο.
  - Ξεκινάμε επιλέγοντας οποιοδήποτε στοιχείο.
  - Ακολουθούμε «ακμές» στην αντίθετη φορά.
  - Όχι κύκλοι και πεπερασμένο: τερματίζουμε σε minimal.



# Τοπολογική Διάταξη

- Υπολογισμός τοπολογικής διάταξης:
  - $a_1$ : minimal ( $A, \leq$ ).
  - $a_2$ : minimal ( $A - \{a_1\}, \leq$ ).
  - $a_3$ : minimal ( $A - \{a_1, a_2\}, \leq$ ).
  - ...
  - 1, 3, 2, 6, 4, 12, 8
  - A, C, E, B, D, G
- Αναζήτηση κατά Βάθος (DFS) στο ΚΑΓ ή στο διάγραμμα Hasse (με φορά ακμών).
  - Κορυφές σε αντίστροφη σειρά «αποχώρησης».
  - Ολοκλήρωση εξερεύνησης κορυφής και γειτόνων: εισαγωγή κορυφής σε στοίβα.
  - Ολοκλήρωση DFS και εξαγωγή από στοίβα: τοπολογική διάταξη.



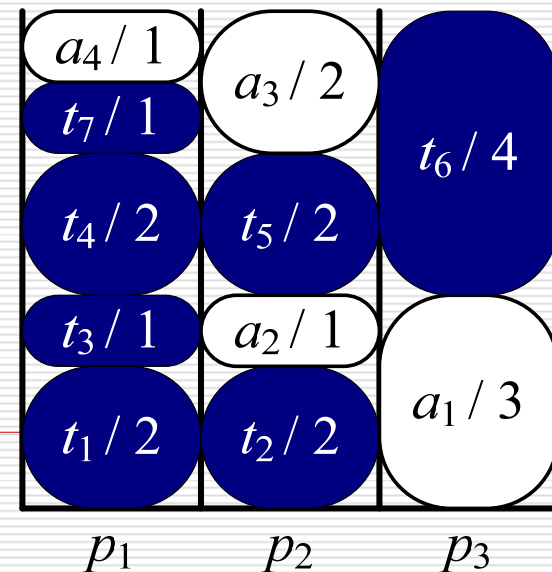
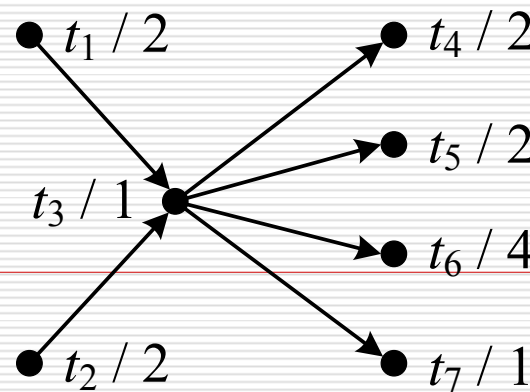


# Λεξικογραφική Διάταξη

- Posets  $(A_1, \leq_1)$  και  $(A_2, \leq_2)$ .
- Λεξικογραφική διάταξη  $\leq$  στο  $A_1 \times A_2$ :
  - $(a_1, a_2) < (\beta_1, \beta_2)$  αν είτε  $a_1 <_1 \beta_1$  είτε  $a_1 = \beta_1$  και  $a_2 <_2 \beta_2$ .
  - $(a_1, a_2) = (\beta_1, \beta_2)$  αν  $a_1 = \beta_1$  και  $a_2 = \beta_2$ .
  - $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$ :  $(2, 4) \leq (2, 5) \leq (3, 2) \leq (5, 1) \leq (5, 100) \leq (6, 0)$ .
- Λεξικογραφική διάταξη  $\leq$  στο  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ :
  - $(a_1, a_2, \dots, a_n) < (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  αν για κάποιο  $k \geq 0$ ,  $a_1 = \beta_1, \dots, a_k = \beta_k$  και  $a_{k+1} <_{k+1} \beta_{k+1}$ .
  - $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  αν  $a_1 = \beta_1, \dots, a_n = \beta_n$ .
- Λεξικογραφική διάταξη **συμβολοσειρών** με βάση (ολική) **διάταξη γραμμάτων** του αλφαβήτου.
  - Το «κενό» προηγείται κάθε συμβόλου, τόνοι αγνοούνται.  
Π.χ. μαντείο < μάντης < μηλιά < μήλο < το < τόπι.

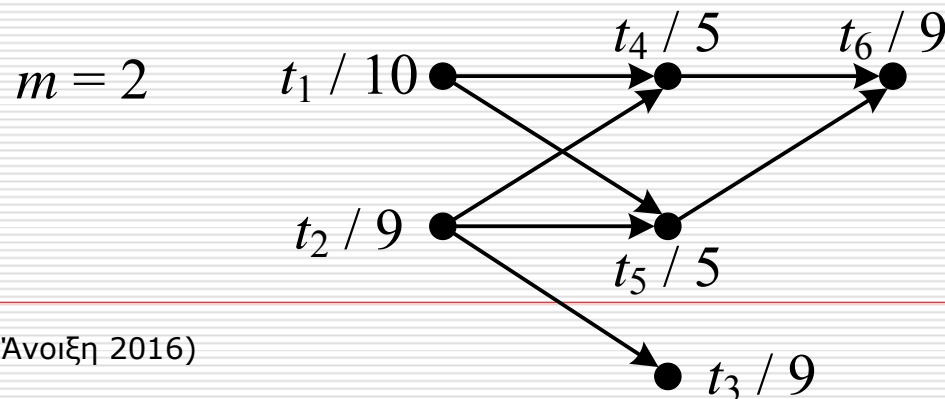
# Χρονοπρογραμματισμός Εργασιών

- $m$  ίδιους επεξεργαστές  $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ .
- $n$  εργασίες  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  με χρόνους εκτέλεσης  $w_1, w_2, \dots, w_n$ .
- Μερική διάταξη επί των εργασιών:
  - $t_j \leq t_i$  αν  $t_i$  δεν μπορεί να αρχίσει πριν ολοκληρωθεί η  $t_j$ .
- Χρονοδιάγραμμα εκτέλεσης εργασιών:
  - Για κάθε εργασία  $t_i$  χρόνος έναρξης  $s(i)$  και επεξεργαστής  $p(i)$ .
    - Εργασίες **δεν διακόπτονται**: εκκίνηση  $s(i)$ , τερματισμός  $s(i)+w_i$
  - Κάθε χρονική στιγμή, το πολύ μία εργασία σε κάθε επεξεργαστή:
    - $p(i) = p(j) \Rightarrow [s(i), s(i)+w_i) \cap [s(j), s(j)+w_j) = \emptyset$
  - Για κάθε  $t_j$  με  $t_j \leq t_i$ ,  $s(j)+w_j \leq s(i)$ .



# Χρονοπρογραμματισμός Εργασιών

- Χρονοδιάγραμμα με **ελάχιστο χρόνο διεκπεραίωσης**.
  - Ελαχιστοποίηση χρόνου ολοκλήρωσης τελευταίας εργασίας.
  - Τοπολογική διάταξη αν μόνο **ένας επεξεργαστής**.
  - NP-δύσκολο για  $m \geq 2$ .
- **Βέλτιστος** χρόνος διεκπεραίωσης τουλάχιστον:
  - $(w_1 + \dots + w_n) / m$ .
  - Συνολικός χρόνος κατά μήκος **μακρύτερης (χρονικά) αλυσίδας**.
- Ποτέ επεξεργαστής **αδρανής εσκεμμένα**.
  - **Δεν εγγυάται βέλτιστη λύση**.
  - Εγγυάται χρόνο διεκπεραίωσης  $\leq (2 - \frac{1}{m}) \times$  ελάχιστο χρ. διεκπ.



# Χρονοπρογραμματισμός Εργασιών

- Ανάλυση για  $m = 2$ , χρ.διεκπ. =  $\omega$ , βέλτιστος χρ.διεκπ. =  $\omega^*$

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n w_i + \sum_{\alpha_i \in A} \text{χρόνος}(\alpha_i) \right) \leq \omega^* + \frac{1}{2} \sum_{\alpha_i \in A} \text{χρόνος}(\alpha_i)$$

- Υπάρχει αλυσίδα εργασιών με χρονική διάρκεια  $\geq$  συνολική διάρκεια περιόδων αδράνειας.
- Περίοδος αδράνειας  $a_i$  «προκαλείται» από αλυσίδα εργασιών που εκτελείται στον άλλο επεξεργαστή.
  - Αλυσίδα εργασιών που «προκαλεί»  $a_i$  έχει διάρκεια  $\geq$  χρόνος( $a_i$ ).
  - Ένωση αλυσίδων που «προκαλούν» περιόδους αδράνειας δίνει αλυσίδα με διάρκεια  $\geq$  συνολική διάρκεια περιόδων αδράνειας.

$$\omega \leq \omega^* + \frac{1}{2} \sum_{\alpha_i \in A} \text{χρόνος}(\alpha_i) \leq \frac{3}{2} \omega^*$$