

Μη-Αριθμήσιμα Σύνολα, Διαγωνιοποίηση

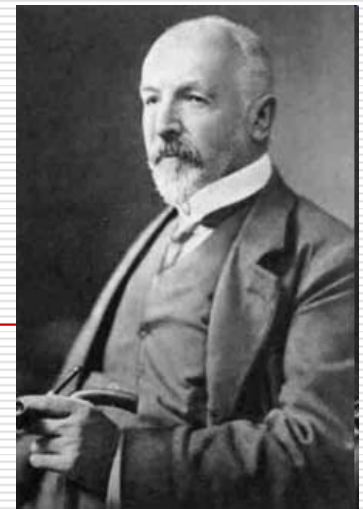
Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

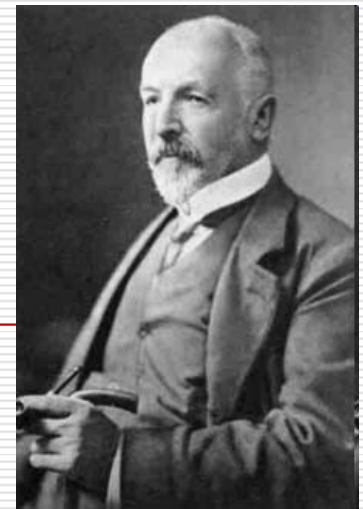


Αριθμήσιμα Σύνολα



- Σύνολο **πεπερασμένο** αν έχει πεπερασμένο πληθικό αριθμό, διαφορετικά **άπειρο**.
- **Cantor**, 1873: Σύγκριση μεγεθών **άπειρων** συνόλων.
- **Ισάριθμα** σύνολα A και B:
 - Υπάρχει **1-1 και επί** συνάρτηση (**αντιστοιχία**) $f : A \rightarrow B$.
Υπάρχει **τέλειο ταίριασμα** μεταξύ στοιχείων A και στοιχείων B.
Π.χ. $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$: $(1, A), (2, B), (3, \Gamma), (4, \Delta)$.
- **Πεπερασμένο** σύνολο A:
 - **Ισάριθμο του** $\{1, \dots, n\}$, για κάποιο φυσικό $n \geq 1$.
Το n είναι ο **πληθικός αριθμός** του συνόλου A.
- **Αριθμήσιμο** σύνολο A: **πεπερασμένο ή ισάριθμο του N**.
 - Υπάρχει τέλειο ταίριασμα στοιχείων A με φυσικούς αριθμούς.
Με $\{1, \dots, |A|\}$ αν A πεπερασμένο, με N αν A άπειρο.

Αριθμήσιμα Σύνολα

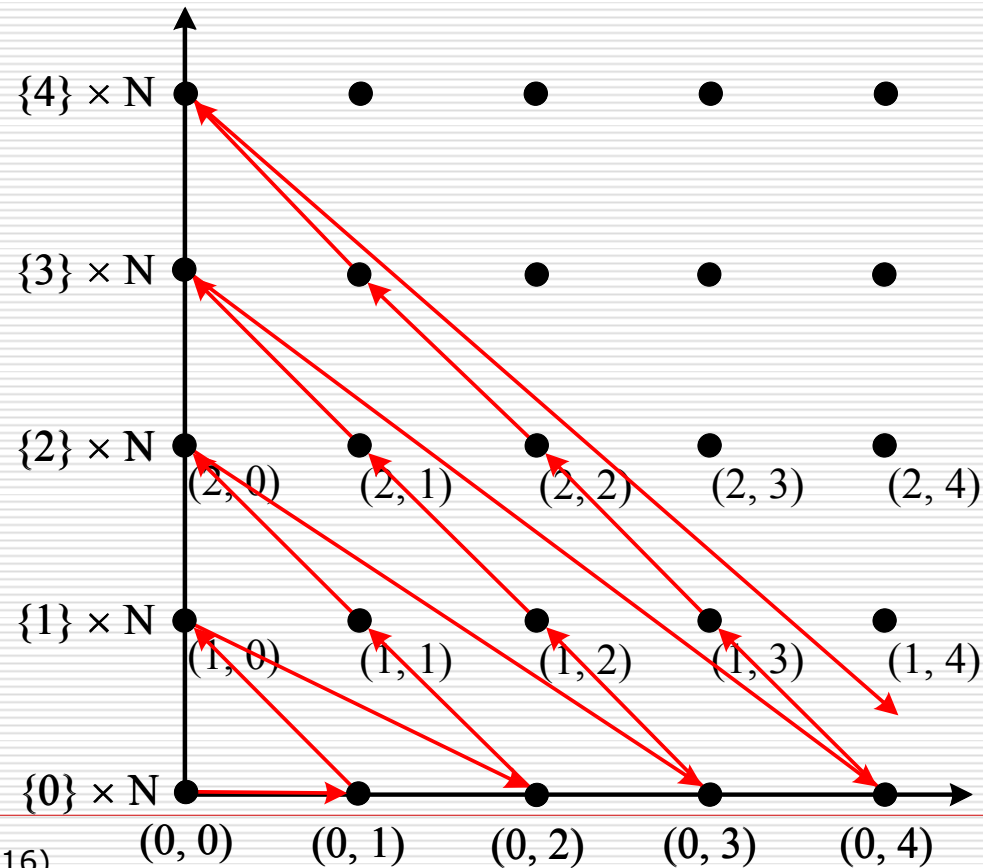


- Διαδικασία **(απ)αρίθμησης** στοιχείων συνόλου A:
 - Εξελίσσεται σε διακριτά βήματα: 1, 2, 3, ...
Κάθε βήμα απαριθμεί διαφορετικό στοιχείο.
 - Κάθε συγκεκριμένο στοιχείο απαριθμείται σε συγκεκριμένο **(πεπερασμένο) βήμα**.
- Αριθμήσιμο σύνολο αν επιδέχεται μιας **διαδικασίας απαρίθμησης**.
- Παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων:
 - Σύνολο **θετικών ζυγών** αριθμών: αριθμός i στο βήμα $i/2$, ή $f(i) = i/2$.
 - Σύνολο **ακεραίων** αριθμών: $f(i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = 0 \\ 2i + 1 & \text{αν } i \text{ θετικός} \\ 2|i| & \text{αν } i \text{ αρνητικός} \end{cases}$
 - Ένωση **πεπερασμένου πλήθους αριθμήσιμων** συνόλων.
Π.χ. ένωση k άπειρων **(ξένων μεταξύ τους)** συνόλων: $\{1, \dots, k\} \times \mathbb{N}$
$$f(i, j) = jk + i, i \in \{1, \dots, k\}, j \in \mathbb{N}$$

Αριθμήσιμα Σύνολα

- Παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων:
 - Ένωση αριθμήσιμα άπειρου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων, π.χ. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$f(i, j) = \frac{1}{2}[(i + j)^2 + 3i + j]$$



(Μη-)Αριθμήσιμα Σύνολα

- Άλλα παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων:
 - Σύνολο **ρητών** (κλασματικών) αριθμών \mathbb{Q}
 - Παρόμοια με το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
 - Σύνολο **συμβολοσειρών** (πεπερασμένου, αλλά απεριόριστου, μήκους) με γράμματα της Ελληνικής γλώσσας.
 - Λεξικογραφική διάταξη.
- Υπάρχουν **μη-αριθμήσιμα** σύνολα;
 - Πραγματικοί αριθμοί \mathbb{R} , διαστήματα πραγματικών, π.χ. $[0, 1]$.
 - Δυναμοσύνολα (αριθμήσιμα) άπειρων συνόλων, π.χ. $2^{\mathbb{N}}$.
- Πως **αποδεικνύουμε** ότι ένα σύνολο είναι μη-αριθμήσιμο;
 - Cantor: αποδεικτική τεχνική της **διαγωνιοποίησης** το 1891.
 - Σημαντικότερες εφαρμογές, μεταξύ άλλων στη **Θεωρία Υπολογισμού** και στην **Υπολογιστική Πολυπλοκότητα**.

Μη-Αριθμήσιμα Σύνολα

- Το $2^{\mathbb{N}}$ είναι **μη-αριθμήσιμο**.
 - Έστω ότι $2^{\mathbb{N}}$ αριθμήσιμο, άρα ισάριθμο του \mathbb{N} .
 - Άρα υπάρχει **αντιστοιχία** μελών του $2^{\mathbb{N}}$ με φυσικούς στο \mathbb{N} .
 - Με βάση αυτή, **απαριθμούμε** $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$, όλα τα υποσύνολα φυσικών / στοιχεία του $2^{\mathbb{N}}$.
 - Έστω το σύνολο φυσικών $D = \{ k \in \mathbb{N} : k \notin S_k \}$
 - Σε ποια θέση εμφανίζεται το D στην απαρίθμηση;
 - $D \neq S_0$ γιατί 0 ανήκει **μόνο σε ένα** από τα D και S_0 .
 - $\forall m, D \neq S_m$ γιατί m ανήκει **μόνο σε ένα** από τα D και S_m . Τα D και S_m «**διαφωνούν**» στο στοιχείο m .
 - **Άτοπο**: το D δεν εμφανίζεται **πουθενά** στην απαρίθμηση!
 - Άρα το $2^{\mathbb{N}}$ **δεν είναι αριθμήσιμο**.

Διαγωνιοποίηση

- Έστω αριθμήσιμο σύνολο A και (διμελής σχέση) $R \subseteq A \times A$
 - Αριθμήσιμο: θεωρούμε ότι $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
- Για κάθε $a_k \in A$, γραμμή k της R : $R(a_k) = \{a_j \in A : (a_k, a_j) \in R\}$
- Συμπλήρωμα διαγωνίου $D = \{a_j \in A : (a_j, a_j) \notin R\}$
- D είναι **διαφορετικό** από **κάθε** γραμμή k .
 - Διαφέρει από $R(a_1)$ στο a_1 , από $R(a_2)$ στο a_2 , κοκ.

| | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $R(a_1)$ | × | | × | | × |
| $R(a_2)$ | | | × | × | × |
| $R(a_3)$ | | × | | × | |
| $R(a_4)$ | × | | | × | × |
| $R(a_5)$ | | × | × | | |

$$R(a_1) = \{a_1, a_3, a_5\}$$

$$R(a_2) = \{a_3, a_4, a_5\}$$

$$R(a_3) = \{a_2, a_4\}$$

$$R(a_4) = \{a_1, a_4, a_5\}$$

$$R(a_5) = \{a_2, a_3\}$$

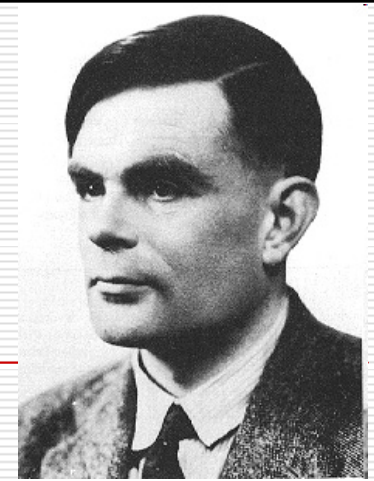
$$D = \{a_2, a_3, a_5\}$$

Υπόθεση του Συνεχούς



- Cantor διατύπωσε και προσπάθησε να αποδείξει την Υπόθεση του Συνεχούς (Continuum Hypothesis):
 - Δεν υπάρχει σύνολο με πληθικό αριθμό ανάμεσα στο \aleph_0 και στο \aleph_1 .
- Gödel (1937) έδειξε ότι **υπόθεση** είναι **συμβατή** με τα αξιώματα της συνολοθεωρίας (άρα **δεν** υπάρχει **αντιπαράδειγμα**).
- Cohen (1963) έδειξε ότι **άρνηση** της υπόθεσης είναι **συμβατή** με τα αξιώματα της συνολοθεωρίας (άρα **δεν** υπάρχει **απόδειξη**).
- Υπόθεση του Συνεχούς δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί ούτε να καταρριφθεί!

Μη Υπολογισιμότητα



- **Πρόβλημα Τερματισμού** (Halting Problem):
 - Μηχανή Turing που με είσοδο μηχανή Turing M και «δεδομένα» w , αποφαινεται αν $M(w)$ τερματίζει.
- **A. Turing:** Πρόβλημα Τερματισμού **δεν** είναι **επιλύσιμο**.
- Θ.δ.ο. **δεν** υπάρχει **πρόγραμμα T** που με είσοδο πρόγραμμα Π και δεδομένα Δ , αποφασίζει αν $\Pi(\Delta)$ τερματίζει.
 - $\Pi(\Delta)$: εκτέλεση προγράμματος Π με είσοδο αρχείο δεδομένων Δ .

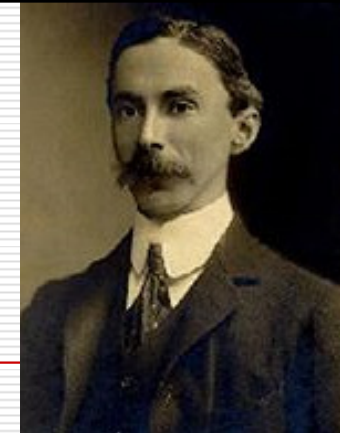
Μη Υπολογισιμότητα

- Έστω πρόγραμμα T : $T(\Pi, \Delta) = \text{ΝΑΙ}$ αν $\Pi(\Delta)$ τερματίζει.
 - Πρόγραμμα Π και δεδομένα Δ δίνονται στο T ως αρχεία Π (αρχείο σε γλώσσα C) και Δ (οποιοδήποτε αρχείο κειμένου).
 - Δεδομένα μπορεί αρχείο σε γλώσσα C , και **αρχείο περιγραφής Π** .
 $T(\Pi, \Pi)$: ελέγχει αν $\Pi(\Pi)$ τερματίζει.
- Ορίζουμε πρόγραμμα D με είσοδο εκτελέσιμο αρχείο Π , $D(\Pi)$:
if $T(\Pi, \Pi) = \text{ΝΑΙ}$ **then** loop forever **else** halt
 - $D(\Pi)$ **τερματίζει** αν $\Pi(\Pi)$ **δεν** τερματίζει.
- Τι παράγει η κλήση $D(D)$;
 - Αν $D(D)$ **τερματίζει**, $T(D, D) = \text{ΝΑΙ}$, και $D(D)$ **δεν** τερματίζει!
 - Αν $D(D)$ **δεν** τερματίζει, $T(D, D) = \text{ΟΧΙ}$, και $D(D)$ **τερματίζει!**
- **Αντίφαση**, άρα **δεν** υπάρχει τέτοιο πρόγραμμα!

Διαγωνιοποίηση

- Προγράμματα (αρχεία σε C) είναι **αριθμήσιμα**:
 - $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$ μια απαρίθμηση τους.
- Έστω ότι υπάρχει πρόγραμμα T που για προγράμματα Π_i, Π_j , $T(\Pi_i, \Pi_j) = \text{ΝΑΙ}$ **ανν** $\Pi_i(\Pi_j)$ τερματίζει.
 - Πρόγραμμα D που $\forall \Pi_i, D(\Pi_i)$ τερματίζει ανν $\Pi_i(\Pi_i)$ **δεν** τερματίζει.
 - D εμφανίζεται στην απαρίθμηση: $(D, \Pi_i) \in H$ ανν $(\Pi_i, \Pi_i) \notin H$.
- Σχέση H : $(\Pi_i, \Pi_j) \in H$ ανν $\Pi_i(\Pi_j)$ τερματίζει.
 - (D, D) ανήκει στην H ;

| | Π_1 | Π_2 | Π_3 | Π_4 | ... | $\cdot D$ | ... |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| Π_1 | T | Δ | Δ | T | | T | |
| Π_2 | T | Δ | Δ | T | ... | Δ | ... |
| Π_3 | Δ | T | Δ | Δ | | T | |
| Π_4 | T | Δ | T | T | | T | |
| \vdots | | | \vdots | | \ddots | | |
| $\cdot D$ | Δ | T | T | Δ | | ? | |
| \vdots | | | \vdots | | | | \ddots |



Παράδοξο του Russell

- Σύνολα που ορίζονται με βάση **χαρακτηριστική ιδιότητα** στοιχείων τους και **χωρίς αναφορά** σε σύμπαν U .
- S περιέχει σύνολα που δεν είναι στοιχεία του εαυτού τους.
$$S = \{A \text{ σύνολο: } A \notin A\}$$
 - Κατά κανόνα, σύνολα **δεν** είναι **στοιχεία** του εαυτού τους, π.χ. N δεν είναι ακέραιος, ανθρωπότητα δεν είναι άνθρωπος.
 - Αλλά π.χ. σύνολο ιδεών μπορεί να θεωρηθεί ιδέα.
- Είναι το S στοιχείο του εαυτού του; Δηλ. $S \in S$;
 - Αν $S \in S$, τότε $S \notin S$. Αν $S \notin S$, τότε $S \in S$. **Αντίφαση!**
- Υπάρχει κουρέας σε χωριό που ξυρίζει οποιονδήποτε δεν ξυρίζεται μόνος του.
 - $S(x, y)$: « x ξυρίζει y ». $\exists x \forall y (S(x, y) \leftrightarrow \neg S(y, y))$
 - **Μη ικανοποιήσιμη δήλωση!** (Ποιός ξυρίζει τον κουρέα;)

Παράδοξο του Russel

- Ανάγκη για αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων και των Μαθηματικών.
 - Σημαντικές ανακαλύψεις και επίδραση στη (μαθηματική) σκέψη.
- Ορισμός συνόλου με χαρακτηριστική ιδιότητα αναφέρεται σε συγκεκριμένο σύμπαν U .

$$S = \{A \in U : A \notin A\}$$

- Αν $S \in S$, τότε $S \notin S$.
- Αν $S \notin S$, τότε $S \notin U$ ή $S \in S$. Άρα $S \notin S$.