



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών
Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης
3η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων

Άσκηση 1 (Κατηγορηματική Δογική και Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall x P(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x))] \rightarrow \exists y \forall x P(y, x)$$

- Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθώραριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ .
- Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ .

Άσκηση 2 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από $n^2 + 1$ διαφορετικούς ακέραιους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από $n^2 + 1$ διατεταγμένα ζεύγη ακεραιών της μορφής (a_k, k) , $k \in \{1, \dots, n^2 + 1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ και $k \leq \ell$ (όπου \leq η συνήθης διάταξη των αριθμών).

- Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
- Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R) ;
- Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$.