Γεννήτριες Συναρτήσεις

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Email: fotakis@cs.ntua.gr

1 Γεννήτριες Συναρτήσεις

Η *συνήθης Γεννήτρια Συνάρτηση* μιας ακολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ δίνεται από τη σειρά $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$. Ο συντελεστής του x^i είναι ο i-οστός όρος της ακολουθίας[1] (δηλ. ο α_i).

Οι Γεννήτριες Συναρτήσεις (ΓΣ) αποτελούν έναν εναλλακτικό τρόπο αναπαράστασης / κωδικοποίησης των ακολουθιών. Κάθε ακολουθία αντιστοιχεί σε μια μοναδική ΓΣ και αντίστροφα. Αν γνωρίζουμε την ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ είναι εύκολο να υπολογίσουμε τη ΓΣ $A(x)$ με βάση τον ορισμό. Αν γνωρίζουμε τη ΓΣ $A(x)$ υπολογίζουμε τους όρους της ακολουθίας / συντελεστές των δυνάμεων του x από τη σχέση $\alpha_n = (1/n!)A^{(n)}(0)$, όπου $A^{(n)}(0)$ είναι η τιμή της n-οστής παραγώγου της $A(x)$ στο 0.

Για παράδειγμα, η ΓΣ της ακολουθίας με n-οστό όρο $\alpha_n = b\lambda^n$ είναι

$$A(x) = b\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x^i = \frac{b}{1-\lambda x}$$

Η ΓΣ της ακολουθίας $1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$ είναι $1 + x + x^2 + x^3$. Η ΓΣ της ακολουθίας $7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, \ldots$ είναι $7 + 6x + 5x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$. Αντίστροφα, η ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ $A(x) = 5/(1-4x)$ έχει n-οστό όρο $\alpha_n = 5 \cdot 4^n$, και η ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ $B(x) = 2 + 3x + 4x^2 + x^3$ είναι η $2, 3, 4, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots$.

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε την ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ $\frac{1}{1+x}$.

Λύση. Εφαρμόζοντας το δυωνυμικό ανάπτυγμα[2], προκύπτει ότι

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 2 \cdots k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Επομένως, η ακολουθία είναι $\alpha_n = (-1)^n$. □

[1] Θα θεωρούμε πάντα ότι οι τιμές που παίρνει η μεταβλητή x είναι αρκετά μικρές ώστε η σειρά να συγκλίνει. Εξ' αιτίας αυτής της υπόθεσης, μπορούμε να χειριστούμε τη σειρά σαν πεπερασμένο άθροισμα. Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι η συνάρτηση $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$ είναι άπειρα παραγωγίσιμη (αναλυτική) και οι παράγωγοί της υπολογίζονται παραγωγίζοντας τη σειρά σαν πεπερασμένο άθροισμα. Με άλλα λόγια, $A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i\alpha_i x^{i-1}$.

[2] Το ανάπτυγμα της παράστασης $(1+x)^n$ είναι $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ όταν το n είναι φυσικός αριθμός, και $(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k$ διαφορετικά (π.χ. όταν το n είναι αρνητικός ακέραιος ή μη-ακέραιος αριθμός). Αυτό το ανάπτυγμα είναι γνωστό σαν *δυωνυμικό ανάπτυγμα*. Μια συνηθισμένη ειδική περίπτωση είναι το ανάπτυγμα του $(1-x)^{-n}$ όπου το n είναι φυσικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση, $(1-x)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$.

2 Βασικές Ιδιότητες

Για τη συνέχεια, θεωρούμε ακολουθίες $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ και $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$ με ΓΣ $A(x)$ και $B(x)$ αντίστοιχα.

Γραμμική Ιδιότητα. Έστω c, d σταθερές. Η ΓΣ της ακολουθίας $c\,\boldsymbol{\alpha} + d\,\boldsymbol{\beta}$ είναι $c\,A(x) + d\,B(x)$. Για παράδειγμα, η ΓΣ της ακολουθίας $4^n + 9 \cdot 2^n$ είναι $\frac{1}{1-4x} + \frac{9}{1-2x} = \frac{10-38x}{1-6x+8x^2}$. Αντίστροφα, για να βρούμε την ακολουθία με ΓΣ $\frac{9-47x}{1-10x+21x^2}$ αναλύουμε τη ΓΣ σε μερικά κλάσματα $\frac{5}{1-3x} + \frac{4}{1-7x}$. Η ακολουθία είναι $5 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n$.

Ιδιότητα της Ολίσθησης. Συμβολίζουμε με $S^k\boldsymbol{\alpha}$ την ακολουθία με τιμές:

$$(S^k\boldsymbol{\alpha})_n = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 0, \ldots, k-1. \\ \alpha_{n-k} & \text{για } n \geq k. \end{cases}$$

Δηλαδή πρόκειται για την ακολουθία που προκύπτει από την "δεξιά ολίσθηση" της $\boldsymbol{\alpha}$ κατά k όρους. Η ΓΣ της ακολουθίας $S^k\boldsymbol{\alpha}$ είναι η $x^kA(x)$. Πράγματι,

$$x^kA(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^{j+k} = \sum_{n=0}^{k-1} 0x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{n-k}x^n$$

Το τελευταίο άθροισμα προκύπτει από το πρώτο με αλλαγή μεταβλητής (θέτουμε $n = j + k$).

Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα βρίσκουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots$ είναι $\frac{x^4}{1-x}$. Ομοίως, η ΓΣ της ακολουθίας $0, 0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{n-2}, \ldots$ είναι $\frac{x^2}{1-2x}$.

Συμβολίζουμε με $S^{-k}\boldsymbol{\alpha}$ την ακολουθία με τιμές:

$$(S^{-k}\boldsymbol{\alpha})_n = \alpha_{n+k} \quad \text{για κάθε } n \geq 0.$$

Δηλαδή πρόκειται για την ακολουθία που προκύπτει από την "αριστερή ολίσθηση" της $\boldsymbol{\alpha}$ κατά k όρους. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $S^{-k}\boldsymbol{\alpha}$ είναι:

$$x^{-k}\left(A(x) - \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x^i\right)$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ιδιότητα, βρίσκουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $8, 16, 32, \ldots, 2^{n+3}, \ldots$ είναι:

$$x^{-3}[\tfrac{1}{1-2x} - 1 - 2x - 4x^2] = \tfrac{8}{1-2x}$$

Βέβαια σε αυτή την απλή περίπτωση μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Άσκηση 2. Έστω ακολουθία $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ με ΓΣ $A(x)$. Να υπολογίσετε τη ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = c\alpha_n + d$, όπου c, d δύο σταθερές.

Λύση. Από τη γραμμική ιδιότητα προκύπτει ότι η ζητούμενη ΓΣ είναι $B(x) = cA(x) + \frac{d}{1-x}$. □

Άσκηση 3. Έστω ακολουθία $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ με ΓΣ $A(x)$. Να υπολογίσετε τη ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = c^n\alpha_n$, όπου c μία σταθερά.

Λύση. Από τον ορισμό προκύπτει ότι η ζητούμενη ΓΣ είναι $B(x) = A(cx)$. □

Ιδιότητα Μερικών Αθροισμάτων. Η ακολουθία $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$ ονομάζεται και ακολουθία των *μερικών αθροισμάτων* της α_n. Έστω $\Gamma(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας γ_n. Είναι $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{1-x}$. Αυτό προκύπτει παρατηρώντας ότι $\alpha_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$. Από την γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, έχουμε ότι $A(x) = \Gamma(x) - x\Gamma(x)$.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $\gamma_n = n + 1$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\alpha_n = 1$. Αφού η ΓΣ της α_n είναι $A(x) = \frac{1}{(1-x)}$, η ΓΣ της γ_n είναι $\Gamma(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης, συμπεραίνουμε ότι η ΓΣ της ακολουθίας $\gamma_{n-1} = n$ είναι $x\Gamma(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Χρησιμοποιώντας πάλι την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων, προκύπτει ότι η ακολουθία $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} i$ έχει σαν ΓΣ την $\Delta(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$.

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε τον κλειστό τύπο της ακολουθίας την $\Delta(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι η $\Delta(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$ αποτελεί ΓΣ της ακολουθίας $\delta_n = \sum_{i=0}^{n} i$. Ουσιαστικά η άσκηση ζητάει να υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i$. Φυσικά γνωρίζουμε ότι $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$. Εδώ θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ΓΣ. Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και έχουμε ότι

$$(1-x)^{-3} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

Από την ιδιότητας της ολίσθησης,

$$x(1-x)^{-3} = 0x^0 + 1x + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{k+1} = 0 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k$$

Ο όρος δ_n είναι ο συντελεστής του x^n στο παραπάνω ανάπτυγμα. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\sum_{i=0}^{n} i = \binom{n+1}{2}$. Ο υπολογισμός (πολύπλοκων) αθροισμάτων είναι μία από τις πολλές σημαντικές εφαρμογές των ΓΣ. □

Ιδιότητα Συμπληρωματικών Μερικών Αθροισμάτων. Η ακολουθία $\delta_n = \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i$ ονομάζεται και ακολουθία των *συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων* της α_n. Έστω $\Delta(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας των συμπληρωματικών δ_n. Είναι $\Delta(x) = \frac{A(1)-xA(x)}{1-x}$. Αυτό προκύπτει παρατηρώντας ότι $\alpha_n = \delta_n - \delta_{n+1}$. Από την γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, έχουμε ότι

$$A(x) = D(x) - x^{-1}(D(x) - \delta_0) \Rightarrow \delta_0 - xA(x) = (1-x)D(x) \Rightarrow D(x) = \frac{\delta_0 - xA(x)}{1-x}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι $\delta_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = A(1)$.

Ιδιότητα της Συνέλιξης. Η ακολουθία $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta_{n-i}$ ονομάζεται συνέλιξη των ακολουθιών $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ και συμβολίζεται $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta}$. Έστω $\Gamma(x)$ η ΓΣ της ακολουθίας $\boldsymbol{\gamma}$. Είναι $\Gamma(x) = A(x)B(x)$. Με απλά λόγια, η ΓΣ της συνέλιξης δύο ακολουθιών δίνεται από το γινόμενο των ΓΣ τους.

Το γεγονός ότι $\Gamma(x) = A(x)B(x)$ προκύπτει εύκολα από τον ορισμό του γινομένου πολυωνύμων. Πράγματι, ο συντελεστής του x^n στο γινόμενο $A(x)B(x)$ είναι ίσος με $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ επειδή όλοι οι δυνατοί τρόποι για να πάρουμε το x^n στο γινόμενο προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας το x^i στο $A(x)$ με το x^{n-i} στο $B(x)$, για όλα τα $i = 0, \ldots, n$.

Άσκηση 5. Να αποδείξετε ότι η πράξη της συνέλιξης είναι πράξη αντιμεταθετική. Δηλαδή να αποδείξετε ότι για οποιεσδήποτε ακολουθίες $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$, ισχύει ότι $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} * \boldsymbol{\alpha}$.

Λύση. Το γινόμενο πολυωνύμων είναι αντιμεταθετική πράξη. Από την ιδιότητα της συνέλιξης, οι ακολουθίες $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta}$ και $\boldsymbol{\beta} * \boldsymbol{\alpha}$ έχουν την ίδια ΓΣ. Άρα πρόκειται για τις ίδιες ακολουθίες. □

Άσκηση 6. Να αποδείξετε την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης.

Λύση. Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη της ακολουθίας $\boldsymbol{\alpha}$ με την ακολουθία $\beta_n = 1$ είναι $\sum_{i=0}^{n} a_i$, δηλαδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\boldsymbol{\alpha}$. Έστω $A(x)$ η ΓΣ της $\boldsymbol{\alpha}$. Γνωρίζουμε ότι η ΓΣ της $\beta_n = 1$ είναι $B(x) = (1-x)^{-1}$. Από την ιδιότητα της συνέλιξης, η ΓΣ της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της $\boldsymbol{\alpha}$ είναι $\frac{A(x)}{1-x}$. □

Άσκηση 7. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} 3^i \, 2^{n-i}$ με τη μέθοδο των ΓΣ.

Λύση. Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο άθροισμα είναι ο n-οστός όρος της συνέλιξης των ακολουθιών $\alpha_n = 3^n$ και $\beta_n = 2^n$. Η πρώτη ακολουθία έχει ΓΣ $A(x) = \frac{1}{1-3x}$ και η δεύτερη ακολουθία έχει ΓΣ $B(x) = \frac{1}{1-2x}$. Η ΓΣ της συνέλιξης τους είναι

$$\frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$$

Το τελευταίο βήμα προκύπτει με μερική κλασματική ανάλυση. Από τη γραμμική ιδιότητα, η ακολουθία που αντιστοιχεί σε αυτή τη ΓΣ έχει n-οστό όρο $3^{n+1} - 2^{n+1}$. Επομένως, $\sum_{i=0}^{n} 3^i \, 2^{n-i} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. □

Ιδιότητα της Κλίμακας. Η ακολουθία $\gamma_n = n\alpha_n$ έχει ΓΣ τη $\Gamma(x) = xA'(x)$, όπου $A'(x)$ είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $A(x)$. Πράγματι,

$$\Gamma(x) = xA'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n x^n)' = x\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n\alpha_n)x^n$$

Η ακολουθία $\delta_n = \frac{\alpha_n}{n+1}$ έχει ΓΣ την

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η παράγουσα του z^n είναι $\frac{z^{n+1}}{n+1}$, έχουμε

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \alpha_n z^n dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^n$$

Και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι όταν η άπειρη σειρά συγκλίνει, μπορούμε να τη χειριστούμε σαν πεπερασμένο άθροισμα.

Άσκηση 8. Να υπολογίσετε τη ΓΣ της ακολουθίας $\alpha_n = n(n+1)$.

Λύση. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η ακολουθία $\beta_n = n$ έχει ΓΣ την $B(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Από την ιδιότητα της κλίμακας, η $\gamma_n = n^2$ έχει ΓΣ την $\varGamma(x) = xB'(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$. Από τη γραμμική ιδιότητα, η ακολουθία $\alpha_n = n(n+1) = n^2 + n$ έχει ΓΣ την

$$\varGamma(x) + B(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Άσκηση 9. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i^2$ χρησιμοποιώντας ΓΣ.

Λύση. Παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο άθροισμα αποτελεί το n-οστό της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας $\gamma_n = n^2$ με ΓΣ την $\varGamma(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$. Από την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων, η ΓΣ για το $\sum_{i=0}^{n} i^2$ είναι $\frac{x(x+1)}{(1-x)^4}$. Εφαρμόζοντας το δυωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε:

$$(1-x)^{-4} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{4+k-1}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$$

Πολλαπλασιάζοντας με x^2 και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της ολίσθησης, έχουμε:

$$\frac{x^2}{(1-x)^4} = 0x^0 + 0x^1 + 1x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{3} x^k$$

Ομοίως για τον πολλαπλασιασμό με x έχουμε:

$$\frac{x}{(1-x)^4} = 0x^0 + 1x^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{3} x^k$$

Από τη γραμμική ιδιότητα, προκύπτει ότι το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i^2$ είναι ίσο με

$$\tbinom{n+1}{3} + \tbinom{n+2}{3} = \tfrac{(n+1)n(n-1)}{6} + \tfrac{(n+2)(n+1)n}{6} = \tfrac{(n+1)n}{6}(n+2+n-1) = \tfrac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Άσκηση 10. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i^3$ χρησιμοποιώντας ΓΣ.

Λύση. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της κλίμακας για ακολουθία $\gamma_n = n^2$, προκύπτει ότι η ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = n^3$ είναι $B(x) = x\varGamma'(x) = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα των μερικών αθροισμάτων προκύπτει ότι η ΓΣ για την ακολουθία $\alpha_n = \sum_{i=0}^{n} i^3$ είναι $A(x) = \frac{B(x)}{1-x} = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^5}$. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, αποδεικνύουμε ότι $\sum_{i=0}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4$. □

Άσκηση 11. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i(i+1)(i+2)(i+3)$.

Ανάλυση σε Κλάσματα και Αντιστροφή Γεννητριών Συναρτήσεων. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ακολουθία με ΓΣ την $P(x)/D(x)$, όπου $P(x), D(x)$ είναι πολυώνυμα του x. Αυτό που κάνουμε είναι να εφαρμόσσουμε μερική κλασματική ανάλυση είτε απ' ευθείας στη συνάρτηση $P(x)/D(x)$ είτε στη συνάρτηση $1/D(x)$. Από το αποτέλεσμα της ανάλυσης σε μερικά κλάσματα, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την ακολουθία με την αντίστοιχη ΓΣ. Αν πρόκειται για την $1/D(x)$, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ολίσθησης και τη γραμμική ιδιότητα και υπολογίζουμε την ακολουθία με ΓΣ $P(x)/D(x)$.

Άσκηση 12. Να υπολογίσετε την ακολουθία με ΓΣ $\frac{2}{1-4x^2}$.

Λύση. Εφαρμόζοντας μερική κλασματική ανάλυση, καταλήγουμε ότι

$$\frac{2}{1-4x^2} = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x}$$

Η ακολουθία με ΓΣ $\frac{1}{1-2x}$ είναι η $\beta_n = 2^n$. Η ακολουθία με ΓΣ $\frac{1}{1+2x}$ είναι η $\gamma_n = (-2)^n$ (για το τελευταίο, εργαζόμαστε όπως στην Άσκηση 1. Από τη γραμμική ιδιότητα, η ζητούμενη ακολουθία είναι

$$\alpha_n = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 0 & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Άσκηση 13. Να υπολογίσετε την ακολουθία με ΓΣ $\frac{22x^3-9x^2-14x-1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$.

Λύση. Εφαρμόζοντας μερική κλασματική ανάλυση, έχουμε

$$\frac{1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2} = \frac{-1/18}{1+x} + \frac{27/50}{1+3x} + \frac{56/225}{1-2x} + \frac{4/15}{(1-2x)^2}$$

Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία με ΓΣ $(1+x)^{-1}$ είναι η $(-1)^n$. Εφαρμόζοντας τη γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία με ΓΣ την $\frac{(-1/18)(22x^3-9x^2-14x-1)}{1+x}$ είναι η

$$-\tfrac{1}{18}\left[22(-1)^{n-3} - 9(-1)^{n-2} - 14(-1)^{n-1} - (-1)^n\right] = -\tfrac{1}{18}\left[-22-9+14-1\right](-1)^n = (-1)^n$$

Ομοίως, η ακολουθία με ΓΣ $(1+3x)^{-1}$ είναι η $(-3)^n$. Από τη γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, έχουμε ότι η ακολουθία με ΓΣ την $\frac{(27/50)(22x^3-9x^2-14x-1)}{1+3x}$ είναι η

$$\tfrac{27}{50}\left[22(-3)^{n-3} - 9(-3)^{n-2} - 14(-3)^{n-1} - (-3)^n\right] = \tfrac{27}{50}\left[-22/27 - 9/9 + 14/3 - 1\right](-3)^n = (-3)^n$$

Ομοίως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία με ΓΣ την $\frac{(56/225)(22x^3-9x^2-14x-1)}{1-2x}$ είναι

$$\tfrac{56}{225}\left[22\cdot 2^{n-3} - 9\cdot 2^{n-2} - 14\cdot 2^{n-1} - 2^n\right] = \tfrac{56}{225}\left[22/8 - 9/4 - 14/2 - 1\right]2^n = -\tfrac{28}{15}\,2^n$$

Τέλος, η ακολουθία με ΓΣ $(1-2x)^{-2}$ είναι η $(n+1)2^n$. Εφαρμόζοντας τη γραμμική ιδιότητα και την ιδιότητα της ολίσθησης, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία με ΓΣ την $\frac{(4/15)(22x^3-9x^2-14x-1)}{(1-2x)^2}$ είναι η

$$\begin{aligned} &\tfrac{4}{15}\left[22\cdot(n-2)2^{n-3} - 9\cdot(n-1)2^{n-2} - 14\cdot n2^{n-1} - (n+1)2^n\right] = \\ &\quad \tfrac{4}{15}\left[22/8 - 9/4 - 14/2 - 1\right]n\,2^n + \tfrac{4}{15}\left[-2(22/8) + 9/4 - 1\right]2^n = -2\,n\,2^n - \tfrac{17}{15}\,2^n \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ζητούμενη ακολουθία είναι

$$\alpha_n = (-1)^n + (-3)^n - 2\,n\,2^n - \tfrac{28+17}{15}\,2^n = (-1)^n + (-3)^n - n\,2^{n+1} - 3\cdot 2^n$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η ζητούμενη ακολουθία μπορεί να προκύψει ευκολότερα παρατηρώντας ότι η συγκεκριμένη ΓΣ μπορεί να αναλυθεί σε μερικά κλάσματα ως εξής

$$\frac{22x^3-9x^2-14x-1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+3x} - \frac{1}{1-2x} - \frac{2}{(1-2x)^2}$$

3 Εφαρμογές των Γεννητριών Συναρτήσεων

Οι ΓΣ έχουν πολλές και σημαντικές εφαρμογές. Στα πλαίσια του μαθήματος, θα δούμε παραδείγματα εφαρμογών των ΓΣ στον υπολογισμό αθροισμάτων, στην επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής, και στην επίλυση αναδρομικών εξισώσεων.

Και στις τρεις περιπτώσεις, η βασική ιδέα είναι ίδια. Το αρχικό πρόβλημα μπορεί να οριστεί διατυπώνοντας μια ή περισσότερες ακολουθίες (δηλαδή το πρόβλημα ορίζεται στο χώρο των ακολουθιών). Πολλές φορές είναι δύσκολο να λύσουμε το πρόβλημα με απευθείας χειρισμό αυτών των ακολουθιών (π.χ. υπολογισμός ενός δύσκολου αθροίσματος). Θα ήταν όμως εύκολο να λύσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα στο χώρο των ΓΣ. Υπολογίζουμε λοιπόν τις ΓΣ των ακολουθιών και μετασχηματίζουμε το πρόβλημα στο χώρο των ΓΣ. Έπειτα λύνουμε το πρόβλημα στο χώρο των ΓΣ χρησιμοποιώντας αλγεβρικά εργαλεία. Τέλος, υπολογίζουμε την ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ που περιγράφει τη λύση του προβλήματος και αποκτούμε τη λύση του αρχικού μας προβλήματος. Αυτή τη μέθοδο ακολουθήσαμε για τον υπολογισμό των αθροισμάτων στις ασκήσεις 4, 7, 9, 10, 11.

Στη συνέχεια θα δούμε και άλλα παραδείγματα όπου εφαρμόζουμε την ίδια μέθοδο.

3.1 Υπολογισμός Αθροισμάτων

Άσκηση 14. Να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i(n-i)$.

Λύση. Θεωρούμε την ακολουθία $\alpha_n = n$ με ΓΣ $A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Το ζητούμενο άθροισμα είναι ο n-οστός όρος της συνέλιξης αυτής της ακολουθίας με τον εαυτό της.

Η ακολουθία $\beta_n = \sum_{i=0}^{n} i(n-i)$, που προκύπτει από την συνέλιξη της α_n με τον εαυτό της, έχει ΓΣ την $A^2(x) = \frac{x^2}{(1-x)^4}$ από την ιδιότητα της συνέλιξης. Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και έχουμε ότι

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της ολίσθησης, προκύπτει ότι

$$\frac{x^2}{(1-x)^4} = 0x^0 + 0x + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k+1}{3} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)k(k-1)}{6} x^k$$

Επομένως, ο n-οστός όρος της ακολουθίας β_n δίνεται από το συντελεστή του x^n στο παραπάνω ανάπτυγμα. Άρα, $\sum_{i=0}^{n} i(n-i) = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) = \frac{1}{6}n(n^2-1)$. □

Άσκηση 15. Να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} i(n-i)^2$.

Λύση. Θεωρούμε τις ακολουθίες $\alpha_n = n$ με ΓΣ $A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ και $\beta_n = n^2$ με ΓΣ $B(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. Το ζητούμενο άθροισμα είναι ο n-οστός όρος της συνέλιξης των δύο ακολουθιών. Από την ιδιότητα της συνέλιξης, η ΓΣ της ακολουθίας $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta}$ είναι $A(x)B(x) = \frac{x^2+x^3}{(1-x)^5}$.

Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και έχουε ότι

$$(1-x)^{-5} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της ολίσθησης (μία φορά για το x^2 και μία φορά για το x^3) και τη γραμμική ιδιότητα, προκύπτει ότι

$$\frac{x^2+x^3}{(1-x)^5} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{k+2}{4}+\binom{k+1}{4}\right]x^k$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι ίσο με το συντελεστή του x^n στο παραπάνω ανάπτυγμα. Αυτός ο συντελεστής είναι

$$\tbinom{n+2}{4}+\tbinom{n+1}{4} = \tfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!}+\tfrac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!} = (n+1)n(n-1)\tfrac{n+2+n-1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \tfrac{1}{12}\,n^2(n^2-1)$$

3.2 Κωδικοποίηση και Επίλυση Προβλημάτων Συνδυαστικής

Βασική Ιδέα. Οι Γεννήτριες Συναρτήσεις (ΓΣ) επιτρέπουν τη **συμβολική** αναπαράσταση όλων των αποτελεσμάτων ενός πειράματος. Όλα τα διαφορετικά αποτελέσματα ενός πειράματος μπορούν να κωδικοποιηθούν κατάλληλα σε μία συνάρτηση, τη λεγόμενη ΓΣ για το πείραμα. Έχοντας τη ΓΣ που αντιστοιχεί σε ένα πείραμα, μπορούμε να απαντήσουμε σε ότι μας ρωτήσουν για αυτό. Αυτή η μεθοδολογία επιτρέπει την κωδικοποίηση και επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους.

Παράδειγμα 1. Έχουμε τρία διαφορετικά αντικείμενα, τα a, b, c, σε ένα "αντίγραφο" το καθένα. Γράφουμε 1 ($= a^0 = b^0 = c^0$) όταν δεν επιλέγουμε κάποιο αντικείμενο και a, b, c όταν το επιλέγουμε. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (ab+ac+bc) + abc$$

περιγράφει όλα τα διαφορετικά αποτελέσματα του πειράματος κατά το οποίο επιλέγουμε αντικείμενα από τα a, b, c χωρίς επανάληψη. Μπορούμε να επιλέξουμε ή να μην επιλέξουμε το a, να επιλέξουμε ή να μην επιλέξουμε το b, και να επιλέξουμε ή να μην επιλέξουμε το c. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του γινομένου αφού αυτά τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα.

Για να αποφύγουμε την εξάρτηση από τις ταυτότητες των συγκεκριμένων αντικειμένων, χρησιμοποιούμε την ίδια μεταβλητή x για όλα τα αντικείμενα. Ο εκθέτης του x δηλώνει τον αριθμό των αντικειμένων που επιλέγουμε σε κάθε περίπτωση. Έτσι η ΓΣ για την επιλογή από τρία διαφορετικά αντικείμενα χωρίς επαναλήψεις είναι

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Υπάρχει λοιπόν 1 τρόπος να επιλέξουμε κανένα αντικείμενο (συντελεστής του x^0), 3 τρόποι να επιλέξουμε ένα αντικείμενο (συντελεστής του x^1), 3 τρόποι να επιλέξουμε δύο αντικείμενα (συντελεστής του x^2), και 1 τρόπος να επιλέξουμε τρία αντικείμενα (συντελεστής του x^3). □

Οι συνήθεις ΓΣ χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του αριθμού των διαφορετικών *συνδυασμών* αντικειμένων.

Αν έχουμε συνδυασμούς από n διακεκριμένα αντικείμενα χωρίς επανάληψη, η ΓΣ είναι:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$$

αφού για κάθε αντικείμενο υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: να το επιλέξουμε μία φορά (συμβολίζεται με $x = x^1$) ή να μην το επιλέξουμε (συμβολίζεται με $1 = x^0$). Τα δύο ενδεχόμενα για κάθε αντικείμενο είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, για αυτό έχω άθροισμα $1 + x$. Τα ενδεχόμενα για τα n διαφορετικά αντικείμενα είναι ανεξάρτητα, για αυτό πολλαπλασιάζουμε τους αντίστοιχους όρους (κανόνας γινομένου) και καταλήγουμε στο $(1 + x)^n$. Ο συντελεστής του x^k, που είναι $\binom{n}{k} = C(n, k)$, δίνει τους διαφορετικούς συνδυασμούς k αντικειμένων από n.

Παράδειγμα 2. Η ΓΣ για επιλογή από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις είναι:

$$\begin{aligned}
(1 + x + x^2 + \ldots)^n = (1 - x)^{-n} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(-x)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k
\end{aligned}$$

Ο συντελεστής του x^k, που είναι $\binom{n+k-1}{k}$, δίνει τους διαφορετικούς συνδυασμούς k από n αντικείμενα με επανάληψη[3]. $\square$

Παράδειγμα 3. Αν επιλέγουμε k από n αντικείμενα με επανάληψη ώστε κάθε αντικείμενο να επιλεγεί τουλάχιστον μία φορά ($k \geq n$), η ΓΣ είναι:

$$\begin{aligned}
(x + x^2 + \ldots)^n = x^n(1 - x)^{-n} &= x^n \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i\right] \\
&= x^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{n+k-n-1}{k-n} x^k \\
&= x^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k
\end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει αναλύοντας το $(1 - x)^{-n}$ όπως παραπάνω, και η τρίτη ισότητα πολλαπλασιάζοντας με x^n και αλλάζοντας τη μεταβλητή i με $k = n + i$ (δηλαδή αντικαθιστούμε το i με $k - n$). Ο συντελεστής του x^k, που είναι $\binom{k-1}{n-1}$, δίνει τους διαφορετικούς συνδυασμούς k από n αντικείμενα με επανάληψη όταν κάθε αντικείμενο επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά. Αυτό φυσικά είναι ίδιο με τη διανομή k μη διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές όταν καμία υποδοχή δεν πρέπει να μείνει κενή. $\square$

Άσκηση 16. Έστω τρεις ομάδες αντικειμένων: Α, Β, και Γ. Να υπολογιστεί η ΓΣ για την επιλογή αντικειμένων από αυτές τις ομάδες ώστε (α) τουλάχιστον 2 και το πολύ 10 αντικείμενα να επιλέγονται από την ομάδα Α, (β) περιττός αριθμός αντικειμένων να επιλέγεται από την ομάδα Β, (γ) ο αριθμός των αντικειμένων από την ομάδα Γ να είναι άρτιος και να μην ξεπερνά το 20. Ποιος συντελεστής δίνει τον αριθμό των τρόπων να επιλέξουμε 5 αντικείμενα;

[3] Η απόδειξη του ίδιου αποτελέσματος με συνδυαστικά επιχειρήματα παρουσιάζεται στις σελίδες 92-93 του βιβλίου του C.L. Liu, Σχέση (3.3).

Λύση. Η ΓΣ είναι:

$$(x^2 + x^3 + \ldots + x^{10})(x + x^3 + x^5 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{20})$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του x^5 και η τιμή του είναι 3. Γενικά ο συντελεστής του x^k δίνει τον αριθμό των τρόπων να επιλέξουμε k αντικείμενα σύμφωνα με τους περιορισμούς. □

Άσκηση 17. Θεωρούμε 5 μπλε μπάλες των 5 κιλών, 10 πράσινες των 2 κιλών και απεριόριστο αριθμό από κόκκινες μπάλες του 1 κιλού. Να υπολογιστούν οι ΓΣ για τα ακόλουθα:
α) Διαφορετικούς τρόπους να επιλέξουμε n μπάλες.
β) Διαφορετικούς τρόπους να επιλέξουμε μπάλες που το συνολικό τους βάρος είναι n.

Λύση. α) Η ΓΣ είναι:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + \ldots + x^{10})(1 + x + x^2 + \ldots)$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του x^n.
β) Σε αυτή την περίπτωση οι εκθέτες του x καθορίζονται από το βάρος κάθε μπάλας. Έτσι, η ΓΣ είναι:

$$(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25})(1 + x^2 + \ldots + x^{20})(1 + x + x^2 + \ldots)$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του x^n. □

Άσκηση 18. Να δείξετε (με χρήση του μηχανισμού των ΓΣ) ότι για $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Λύση. Για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει ότι $(1 + x)^n = (1 + x)^{n-1} + x(1 + x)^{n-1}$. Το αριστερό μέλος είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Στο δεξιό μέλος, η συνάρτηση $(1 + x)^{n-1}$ είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\binom{n-1}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Από την ιδιότητα της ολίσθησης, η συνάρτηση $x(1 + x)^{n-1}$ είναι ΓΣ της ακολουθίας $\binom{n-1}{k-1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Το ζητούμενο προκύπτει από τη γραμμική ιδιότητα. □

Άσκηση 19. Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, των 20, και των 10 λεπτών και θέλουμε να επιλέξουμε 10 κέρματα. Να διατυπώσετε τη ΓΣ και να υπολογίσετε πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι για την παραπάνω επιλογή.

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να διαλέξουμε k κέρματα. Για κάθε είδος κερμάτων, μπορούμε να διαλέξουμε κανένα ή ένα ή δύο, κλπ. Αυτό κωδικοποιείται από τη ΓΣ $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$. Αφού έχουμε τρία διαφορετικά είδη κερμάτων, η ΓΣ για την ακολουθία α_k είναι $(1 - x)^{-3}$. Το ζητούμενο δίνεται από το α_{10}, που είναι ο συντελεστής του x^{10} στο ανάπτυγμα της ΓΣ. Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. Εδώ η λύση προκύπτει εύκολα χρησιμοποιώντας συνδυασμούς αντικειμένων με επανάληψη. □

Άσκηση 20. Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, των 20, και των 10 λεπτών και θέλουμε να διαλέξουμε 10 από αυτά ώστε να έχουμε τουλάχιστον ένα κέρμα και το πολύ 8 κέρματα των 50 λεπτών, άρτιο αριθμό κερμάτων των 10 λεπτών, και ο αριθμός των κερμάτων των 20 λεπτών να είναι περιττός και να μην ξεπερνά το 5. Να διατυπώσετε τη ΓΣ και να υπολογίσετε πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι για την παραπάνω επιλογή.

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να διαλέξουμε k κέρματα με τους παραπάνω περιορισμούς. Για τα κέρματα των 50 λεπτών η ΓΣ είναι $x + x^2 + x^3 + \ldots + x^8$, για τα κέρματα των 10 λεπτών η ΓΣ είναι $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$, και για τα κέρματα των 20 λεπτών η ΓΣ είναι $x + x^3 + x^5$. Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε είδος κερμάτων, έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k:

$$(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^8)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(x + x^3 + x^5)$$

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{10} στο ανάπτυγμα της ΓΣ. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι 11. □

Άσκηση 21. Έχουμε απεριόριστο αριθμό κερμάτων των 50, των 20, και των 10 λεπτών. Να διατυπώσετε τη ΓΣ και να υπολογίσετε πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να σχηματίσουμε το ποσό των 2 ευρώ.

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να σχηματίσουμε το ποσό των k *λεπτών* διαλέγοντας από τα παραπάνω κέρματα. Για τα κέρματα των 50 λεπτών η ΓΣ είναι $1 + x^{50} + x^{100} + \ldots = \frac{1}{1-x^{50}}$, για τα κέρματα των 20 λεπτών η ΓΣ είναι $1 + x^{20} + x^{40} + \ldots = \frac{1}{1-x^{20}}$, και για τα κέρματα των 10 λεπτών η ΓΣ είναι $1 + x^{10} + x^{20} + \ldots = \frac{1}{1-x^{10}}$. Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε είδος κερμάτων, έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k:

$$\frac{1}{1-x^{50}} \cdot \frac{1}{1-x^{20}} \frac{1}{1-x^{10}}$$

Αφού θέλουμε να σχηματίσουμε το ποσό των 200 *λεπτών* (= 2 ευρώ), το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{200} στο ανάπτυγμα της ΓΣ. Για τη συγκεκριμένη άσκηση, είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το ζητούμενο συντελεστή κάνοντας τον παρακάτω πολλαπλασιασμό πολυωνύμων:

$$(1 + x^{50} + x^{100} + x^{200})(1 + x^{20} + x^{40} + \cdots + x^{200})(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{200})$$

Ο συντελεστής του x^{200} είναι 29. □

Άσκηση 22. Να υπολογίσετε τη ΓΣ και τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να σχηματίσουμε το ποσό των 2 ευρώ υπό τους περιορισμούς της Άσκησης 20.

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να σχηματίσουμε το ποσό των k λεπτών υπό τους περιορισμούς της Άσκησης 20. Η ΓΣ για την ακολουθία α_k είναι:

$$(x^{50} + x^{100} + x^{150} + \ldots + x^{400})(1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + \ldots)(x^{20} + x^{60} + x^{100})$$

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{200} στο ανάπτυγμα της ΓΣ. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι 3. Σαν άσκηση να υπολογίσετε ποιοί είναι αυτοί οι τρεις τρόποι. Επίσης, να βρείτε πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να σχηματίσουμε το ποσό των 160 λεπτών και των 165 λεπτών. □

Άσκηση 23. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 χαρτονομίσματα των 5 ευρώ σε 3 διακεκριμένους κουμπαράδες ώστε κανένας κουμπαράς να μην έχει πάνω από 20 ευρώ;

Λύση. Κάθε κουμπαράς πρέπει να πάρει τουλάχιστον 2 και το πολύ 4 χαρτονομίσματα ώστε να ικανοποιηθεί ο περιορισμός. Η ΓΣ για κάθε κουμπαρά είναι $x^2 + x^3 + x^4$. Η ΓΣ για τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να μοιραστούν τα χαρτονομίσματα προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε κουμπαρά $(x^2 + x^3 + x^4)^3$. Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{10} στο ανάπτυγμα της ΓΣ. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι αυτός ο συντελεστής είναι 6. □

Άσκηση 24. Να βρείτε τη ΓΣ και τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $z_1 + \cdots + z_k = n$ στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Να διατυπώσετε ένα πρόβλημα συνδυαστικής αντίστοιχο με αυτό το ερώτημα.

Λύση. Ξεκινώντας από το δεύτερο υπο-ερώτημα, πρόκειται για την επιλογή n από k διαφορετικά αντικείμενα με απεριόριστο αριθμό επαναλήψεων για κάθε αντικείμενο. Ισοδύναμα, πρόκειται για τον αριθμό των τρόπων να τοποθετήσουμε n ίδιες μπάλες σε k διακεκριμένες υποδοχές χωρίς περιορισμούς στον αριθμό των μπαλών που πρέπει να τοποθετήσουμε σε κάθε υποδοχή. Από τη στοιχειώδη συνδυαστική γνωρίζουμε ότι η απάντηση είναι $\binom{n+k-1}{n}$. Στη συνέχεια θα επιβεβαιώσουμε αυτό τον ισχυρισμό με τη μέθοδο των ΓΣ.

Η ΓΣ για κάθε μεταβλητή z_i είναι $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = (1 - x)^{-1}$ αφού η μεταβλητή μπορεί να πάρει την τιμή 0 ή την τιμή 1 ή την τιμή 2, κοκ. Η ΓΣ για τον αριθμό των διαφορετικών λύσεων στους φυσικούς αριθμούς προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για όλες τις μεταβλητές. Το αποτέλεσμα είναι $(1-x)^{-k}$. Το ζητούμενο προκύπτει από το συντελεστή του x^n στο ανάπτυγμα της $(1-x)^{-k}$. Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και βρίσκουμε ότι ζητούμενος συντελεστής είναι $\binom{n+k-1}{n}$. □

Άσκηση 25. Μια ομάδα στη διάρκεια του πρωταθλήματος δίνει 30 αγώνες. Τα δυνατά αποτελέσματα κάθε αγώνα είναι νίκη, ισοπαλία, και ήττα. Χρησιμοποιώντας ΓΣ να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών αποτελεσμάτων αν ο συνολικός αριθμός των νικών είναι περιττός, ο συνολικός αριθμός των ηττών είναι άρτιος, ενώ οι ισοπαλίες είναι τουλάχιστον 2 (ένα αποδεκτό συνολικό αποτέλεσμα είναι για παράδειγμα 7 νίκες, 16 ήττες και 7 ισοπαλίες).

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών αποτελεσμάτων υπό τους παραπάνω περιορισμούς σε k αγώνες συνολικά. Η ΓΣ για τις νίκες είναι $x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{29}$, επειδή ο αριθμός των νικών πρέπει να είναι περιττός. Η ΓΣ για τις ισοπαλίες είναι $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{30}$, επειδή οι ισοπαλίες είναι τουλάχιστον 2. Η ΓΣ για τις ήττες είναι $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{30}$, επειδή ο συνολικός αριθμός των ηττών είναι άρτιος. Η ΓΣ για την ακολουθία α_k είναι:

$$(x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{29})(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{30})(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{30})$$

Το ζητούμενο προκύπτει από το συντελεστή του x^{30} στο ανάπτυγμα της ΓΣ.

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή, επεκτείνουμε τα παραπάνω αθροίσματα μέχρι το άπειρο (έτσι έχουμε άπειρους όρους γεωμετρικής προόδου). Αυτό δεν επηρεάζει το συντελεστή του x^{30} επειδή οι όροι που προστίθενται έχουν εκθέτη μεγαλύτερο του 30. Υποθέτοντας λοιπόν ότι ο αριθμός των αγώνων είναι απεριόριστος, η ΓΣ γίνεται

$$A(x) = \tfrac{x}{1-x^2} \cdot \tfrac{x^2}{1-x} \cdot \tfrac{1}{1-x^2} = \tfrac{x^3}{(1-x)^3(1+x)^2} = \tfrac{x^3}{(1-x^2)^3} + \tfrac{x^4}{(1-x^2)^3}$$

Εφαρμόζοντας το δυωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε:

$$\frac{x^3}{(1-x^2)^3} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{2k+3}$$

και

$$\frac{x^4}{(1-x^2)^3} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^{2k+4}$$

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο ανάπτυγμα δεν υπάρχει το x^{30} (δηλαδή ο αντίστοιχος συντελεστής είναι 0). Στο δεύτερο ανάπτυγμα, το x^{30} εμφανίζεται για $k = 13$. Ο αντίστοιχος συντελεστής είναι $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός διαφορετικών αποτελεσμάτων για 30 αγώνες υπό τους συγκεκριμένους περιορισμούς είναι 105.

Γενικότερα, η ακολουθία α_k που δίνει τον αριθμό των διαφορετικών αποτελεσμάτων για k αγώνες υπό τους συγκεκριμένους περιορισμούς είναι $\alpha_k = \frac{k^2}{8} - \frac{k}{8}(1+(-1)^k) - \frac{1}{16}(1-(-1)^k)$. $\square$

Άσκηση 26. Θέλουμε να μοιράσουμε 24 καραμέλες σε 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 8 καραμέλες. Να βρείτε τη ΓΣ και τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να γίνει αυτό.

Λύση. Έστω α_k ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να μοιράσουμε k καραμέλες σε 4 παιδιά ώστε κάθε παιδί να πάρει τουλάχιστον 3 και το πολύ 8 καραμέλες. Η ΓΣ για κάθε παιδί είναι $x^3 + x^4 + \cdots + x^8$. Πολλαπλασιάζοντας τις ΓΣ για κάθε παιδί, έχουμε τη ΓΣ για την ακολουθία α_k: $A(x) = (x^3+x^4+\cdots+x^8)^4$. Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^{24} στο ανάπτυγμα της $A(x)$. Ένας τρόπος να υπολογίσουμε αυτό το συντελεστή είναι:

$$A(x) = (x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4 = x^{12}(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)^4 = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$$

Ο συντελεστής του x^{24} στο ανάπτυγμα της $A(x)$ είναι ο ίδιος με το συντελεστή του x^{12} στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$. Παρατηρείστε ότι σε αυτό το παράδειγμα δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το άθροισμα $x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^8$ μέχρι το άπειρο επειδή τα $x^9, \ldots, x^{24}$ συνεισφέρουν στο συντελεστή του x^{24}. Έτσι πρέπει να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της $(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$. Εφαρμόζουμε το δυωνυμικό ανάπτυγμα και βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος συντελεστής είναι:

$$(1-x^6)^4(1-x)^{-4} = (1 - 4x^6 + 6x^{12} - \ldots) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$$

Το x^{12} σχηματίζεται από το x^0 στον πρώτο όρο και το x^{12} στο δεύτερο (συντελεστής $\binom{15}{3}$), το x^6 και στους δύο όρους (συντελεστής $-4\binom{9}{3}$), και το x^{12} στον πρώτο όρο και το x^0 στο δεύτερο (συντελεστής 6). Ο ζητούμενος συντελεστής είναι:

$$\binom{15}{3} - 4\binom{9}{3} + 6 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 - 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6} + 6 = 7(65 - 48) + 6 = 119 + 6 = 125$$

4 Εκθετικές Γεννήτριες Συναρτήσεις

Οι συνήθεις ΓΣ μετρούν συνδυασμούς αντικειμένων, αλλά δεν μπορούν να μετρήσουν διατάξεις αντικειμένων (ο λόγος είναι ότι ο πολλαπλασιασμός στους πραγματικούς αριθμούς είναι αντιμεταθετική πράξη).

Για να μετρήσουμε διατάξεις k αντικειμένων από n χρειάζεται να πολλαπλασιάσυμε το συντελεστή του x^k με $k!$ (θυμηθείτε ότι $P(n,k) = C(n,k) \times k!$). Αυτό ακριβώς συμβαίνει αν ενδιαφερόμαστε για το συντελεστή του $\frac{x^k}{k!}$ στο ανάπτυγμα της ΓΣ αντί για το συντελεστή του x^k. Ουσιαστικά πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε τον k-οστό όρο του αθροίσματος με $k!$: το x^k διαιρείται $k!$ και ο συντελεστής του x^k πολλαπλασιάζεται με $k!$ ώστε η συνολική ποσότητα να παραμείνει αναλλοίωτη.

Παράδειγμα 4. Όταν έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα χωρίς δυνατότητα επανάληψης, η ΓΣ είναι:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^k}{k!}$$

Στο πρώτο άθροισμα, ο συντελεστής του x^k δίνει τον αριθμό των συνδυασμών k από n αντικείμενα χωρίς επανάληψη. Στο τελευταίο άθροισμα, ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$ δίνει τον αριθμό των διατάξεων k από n αντικείμενα χωρίς επανάληψη. □

Η *εκθετική Γεννήτρια Συνάρτηση* μιας ακολουθίας $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ δίνεται από τη σειρά $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$. Ο συντελεστής του $\frac{x^i}{i!}$ είναι ο i-οστός όρος της ακολουθίας (δηλ. ο a_i). Οι εκθετικές ΓΣ οφείλουν το ονομά τους στην ταυτότητα:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Οι εκθετικές ΓΣ χρησιμοποιούνται για να μετρήσουμε διατάξεις - μεταθέσεις αντικειμένων και τις διανομές διακεκριμένων αντικειμένων σε διακεκριμένες υποδοχές.

Παράδειγμα 5. Η ΓΣ για τις μεταθέσεις n *ίδιων* αντικειμένων είναι $\frac{x^n}{n!}$. Πράγματι υπάρχει μία και μόνη μετάθεση όταν όλα τα αντικείμενα είναι ίδια.

Αν έχουμε n αντικείμενα χωρισμένα σε k ομάδες (κάθε ομάδα αποτελείται από ίδια αντικείμενα) με πληθάριθμους $n_1, \ldots, n_k$, $n = n_1 + \cdots + n_k$, η ΓΣ για τον αριθμό των μεταθέσεών τους είναι:

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{x^{n_i}}{n_i!} = \frac{x^n}{n_1! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \frac{x^n}{n!},$$

όπου ο συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ δίνει τον αριθμό των διαφορετικών μεταθέσεων αυτών των αντικειμένων.

Αν ενδιαφερόμαστε για διατάξεις από n αντικείμενα με απεριόριστες επαναλήψεις (κάθε αντικείμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διάταξη καμία ή μία ή δύο κοκ. φορές), η εκθετική ΓΣ είναι:

$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^n = e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

Ο συντελεστής του $\frac{x^k}{k!}$, που είναι n^k, δίνει τις διαφορετικές διατάξεις k από n αντικείμενα με επανάληψη. □

Άσκηση 27. Να υπολογιστεί ο αριθμός των τετραδικών αριθμών με μήκος k για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Τα ψηφία 1, 2 και 3 χρησιμοποιούνται τουλάχιστον μία φορά.
β) Έχουμε άρτιο αριθμό εμφανίσεων του ψηφίου 0.
γ) Έχουμε περιττό αριθμό εμφανίσεων του ψηφίου 0.

Λύση. Αφού διαφορετικές ακολουθίες ψηφίων δίνουν διαφορετικούς αριθμούς, πρόκειται για πρόβλημα διατάξεων, και πρέπει να χρησιμοποιήσουμε εκθετικές ΓΣ.
α) Η ΓΣ είναι:

$$e^x(e^x-1)^3 = e^x(e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1) = e^{4x}-3e^{3x}+3e^{2x}-e^x$$

Το $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$ είναι ο εκθετικός απαριθμητής για τις διατάξεις ενός αντικειμένου με επανάληψη χωρίς περιορισμούς (εδώ αντιστοιχεί στο ψηφίο 0). Το $e^x-1 = \frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$ είναι ο εκθετικός απαριθμητής για τις διατάξεις ενός αντικειμένου με επανάληψη όπου το αντικείμενο εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά (εδώ εμφανίζεται μία φορά για καθένα από τα ψηφία 1, 2 και 3).

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^k}{k!}$, που είναι $4^k-3^{k+1}+3\cdot 2^k-1$.
β) Παρατηρούμε ότι η

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

είναι ο εκθετικός απαριθμητής για διατάξεις ενός αντικειμένου με επανάληψη όπου το αντικείμενο εμφανίζεται άρτιο αριθμό φορών. Εδώ ο περιορισμός για άρτιο αριθμό εμφανίσεων υπάρχει για το ψηφίο 0. Τα άλλα ψηφία δεν έχουν περιορισμούς. Συνεπώς η ΓΣ για τα τέσσερα ψηφία είναι:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}e^{3x} = \frac{e^{4x}+e^{2x}}{2}$$

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^k}{k!}$, που είναι $\frac{4^k+2^k}{2}$.
γ) Παρατηρούμε ότι η

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ldots$$

είναι ο εκθετικός απαριθμητής για διατάξεις ενός αντικειμένου με επανάληψη όπου το αντικείμενο εμφανίζεται περιττό αριθμό φορών. Εδώ ο περιορισμός για περιττό αριθμό εμφανίσεων υπάρχει για το ψηφίο 0. Τα άλλα ψηφία δεν έχουν περιορισμούς. Συνεπώς η ΓΣ για τα τέσσερα ψηφία είναι:

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}e^{3x} = \frac{e^{4x}-e^{2x}}{2}$$

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του $\frac{x^k}{k!}$, που είναι $\frac{4^k-2^k}{2}$.

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των (β) και (γ) δίνει 4^k όπως πρέπει (επειδή τα δύο ενδεχόμενα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα και έχουν ως ένωση το σύνολο των τετραδικών αριθμών μήκους k).
□

Άσκηση 28. Ζητείται η ΓΣ για τη διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές όταν δεν έχει σημασία η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές και καμία υποδοχή δεν πρέπει να μείνει κενή ($k \geq n$).

Λύση. Η διανομή διακεκριμένων αντικειμένων σε διακεκριμένες υποδοχές είναι πρόβλημα διατάξεων. Έτσι θα χρησιμοποιήσουμε εκθετική ΓΣ. Ο εκθετικός απαριθμητής για κάθε υποδοχή είναι

$$e^x - 1 = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

αφού η υποδοχή μπορεί να περιέχει ένα, δύο, κοκ. αντικείμενα. Η εκθετική ΓΣ για όλες τις υποδοχές προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου και είναι

$$(e^x - 1)^n$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του $\frac{x^k}{k!}$. □

Άσκηση 29. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να μοιράσω τα 52 διαφορετικά χαρτιά μιας τράπουλας σε 4 παίκτες (διακεκριμένους) όταν κάθε παίκτης πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα χαρτί.

Λύση. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, η εκθετική ΓΣ[4] είναι:

$$(e^x - 1)^4 = e^{4x} - 4e^{3x} + 6e^{2x} - 4e^x + 1$$

και ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του $\frac{x^{52}}{52!}$. Το αποτέλεσμα είναι $4^{52} - 4 \cdot 3^{52} + 6 \cdot 2^{52} - 4$. □

[4] Προσέξτε ότι τα χαρτιά είναι μόνο 52 και κανονικά θα έπρεπε να έχουμε σταματήσει το άθροισμα $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ στον όρο $\frac{x^{49}}{49!}$ (αφού κάθε παίκτης παίρνει τουλάχιστον 1 χαρτί, κανένας δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από 49). Αυτό το άθροισμα *δεν* είναι ίσο $e^x - 1$ και η αλγεβρική αντιμετώπιση θα ήταν δυσκολότερη. Για ευκολία θεωρούμε το άθροισμα μέχρι το άπειρο. Αυτό δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα επειδή οι μεγαλύτερες δυνάμεις του x δεν επηρεάζουν το ζητούμενο συντελεστή.