

# Στοιχεία Προτασιακής Λογικής

---

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Μαθηματικές Προτάσεις

---

- (Μαθηματική) **πρόταση**: δήλωση που μπορεί να είναι **αληθής** ή **ψευδής** (όχι και τα δύο).
  - Το όνομά μου είναι Δημήτρης.
  - Χθες χιόνισε στην Καστοριά.
  - Ο Σεφέρης τιμήθηκε με το Νόμπελ Λογοτεχνίας.
  - Σήμερα είναι η πρώτη μέρα της άνοιξης.
- Άλλα όχι:
  - Τι ώρα είναι;
  - Κάνετε ησυχία παρακαλώ.
  - Σχεδόν κάθε μέρα βρέχει (χωρίς το σχεδόν;)

# Προτασιακή Λογική

---

- Προτάσεις συνδυάζονται **λογικά**: σύνθετες προτάσεις.
  - Αν χιονίσει, θα πάω για σκι ή θα παίξω χιονοπόλεμο.
  - Ο Δ είναι καλός ή ο Δ δεν είναι καλός.
  - Θα κάνω μάθημα στις 9 και θα παίξω μπάσκετ στις 10.
- Στοιχειώδεις προτάσεις: **προτασιακές μεταβλητές**  $p, q, r$ .
  - Βασικά δομικά στοιχεία. Διακριτές τιμές  $A$  ή  $\Psi$  (1 ή 0).
- Συνδυασμοί προτάσεων με **(λογικούς) συνδέσμους**:  
 $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$ .
- **Προτασιακός τύπος**:
  - Είτε προτασιακή μεταβλητή  $p, q, r, \dots$
  - Είτε  $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \oplus \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ , όπου  $\phi, \psi$  ήδη σχηματισμένοι προτασιακοί τύποι.
- Δομή π.τ. αποτυπώνεται σε **δενδροδιάγραμμα**.

# Σημασιολογική Προσέγγιση

- Λογικοί σύνδεσμοι ορίζονται με **πίνακες αλήθειας**.
- **Αποτίμηση**: ανάθεση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές ενός π.τ.
  - Από τιμές αλήθειας μεταβλητών, δενδροδιάγραμμα, και **πίνακες αλήθειας** λογικών συνδέσμων, **υπολογίζουμε τιμή αλήθειας π.τ.**

$p$	$q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
A	A	Ψ	A	A	A	A	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ

# Λογική Συνεπαγωγή

- Αν αληθεύει το  $p$ , τότε αληθεύει το  $q$  :  
 $p \rightarrow q$ .
  - Αν μελετήσεις τουλάχιστον 30 ώρες, τότε θα επιτύχεις στις εξετάσεις.
  - Αν είμαι ο Πρόεδρος των ΗΠΑ, τότε όλοι βαθμολογείστε με 10.
  - Αν γίνω πρωθυπουργός, θα λύσω όλα τα προβλήματα.
  - Όλοι οι φοιτητές εκτός ΣΗΜΜΥ φορούν μαγιό.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$ ( $\equiv \neg p \vee q$ )
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

# Σημασιολογική Προσέγγιση

---

- Ταυτολογική ισοδυναμία  $\varphi \equiv \psi$ 
  - Για κάθε αποτίμηση,  $\varphi$  και  $\psi$  έχουν ίδια τιμή αλήθειας.
  - Π.χ.  $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- Ταυτολογία  $\varphi$ :  $\varphi$  πάντα Α (για κάθε αποτίμηση).
  - Αντίφαση  $\varphi$ :  $\varphi$  πάντα Ψ (για κάθε αποτίμηση).
  - Αντίφαση  $\varphi$  ανν  $\neg\varphi$  ταυτολογία.
- Ικανοποιήσιμος  $\varphi$ :  $\varphi$  δεν είναι αντίφαση.
  - $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$  ικανοποιήσιμο:  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$  ικανοποιήσιμος.
    - Υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί (ταυτόχρονα) όλους τους τύπους του  $T$ .

# Παραδείγματα

---

- Νδο  $\varphi \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$   
ούτε αντίφαση (άρα ικανοποιήσιμος) ούτε ταυτολογία.
  - **Ικανοποιήσιμος  $\varphi$ :**  $p = q = r = A$  ή  $p = q = A$  και  $r = \Psi$ .
  - **Όχι ταυτολογία  $\varphi$ :**  $r = \Psi$  και είτε  $p = A, q = \Psi$  είτε  $p = \Psi, q = A$ .

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$\varphi$
A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	$\Psi$	A	A	$\Psi$	$\Psi$	A
A	$\Psi$	A	$\Psi$	A	A	A	A
A	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	A	A	$\Psi$	$\Psi$
$\Psi$	A	A	$\Psi$	A	A	A	A
$\Psi$	A	$\Psi$	$\Psi$	A	A	$\Psi$	$\Psi$
$\Psi$	$\Psi$	A	$\Psi$	$\Psi$	A	A	A
$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	$\Psi$	A	A	A

# Παραδείγματα

□ Νδο  $\psi \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$  ταυτολογία.

■ Αν  $p = \mathbf{A}$ , τότε  $\mathbf{A}$   
(αληθές συμπέρασμα).

■ Αν  $p = \Psi$ , τότε  $\mathbf{A}$   
(ψευδής υπόθεση).

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
$\mathbf{A}$	$\Psi$	$\Psi$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$
$\Psi$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{A}$	$\Psi$	$\mathbf{A}$
$\Psi$	$\Psi$	$\mathbf{A}$	$\Psi$	$\mathbf{A}$

□ Νδο  $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$  ταυτολογία.

■ Κάθε π.τ. με ίδια συντακτική μορφή  $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$   
(για κάθε  $\varphi, \psi$ ) είναι ταυτολογία!



# Ταυτολογική Συνεπαγωγή

---

- Σύνολο π.τ.  $T$  **συνεπάγεται ταυτολογικά** π.τ.  $\varphi$ ,  $T \models \varphi$  :
  - Κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το  $T$  ικανοποιεί και τον  $\varphi$ . ( $\varphi$  έπεται αναγκαία από υποθέσεις στο  $T$ ).
  - $T \models \varphi$  ανν  $T \cup \{\neg\varphi\}$  **μη** ικανοποιήσιμο.
  - $\emptyset \models \varphi$  (ή απλά  $\models \varphi$ ) δηλώνει ότι  $\varphi$  ταυτολογία.
  - Αν  $T$  μη ικανοποιήσιμο, τότε  $T \models \varphi$  για **κάθε** π.τ.  $\varphi$ !

# Παραδείγματα

---

- Έστω σύνολο π.τ.  $T = \{p_1 \vee \neg p_2, p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_3\}$   
Ποιές από τις παρακάτω αληθεύουν;

$$T \models \neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$$

$$T \models (p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$$

$$T \models (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$$

$$T \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_3)$$

# Παραδείγματα

- Ποιές ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν:

$$\begin{array}{lcl} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi & \Psi \\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \text{A} \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \text{A} \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi & \text{A} \\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) & \Psi \\ \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) & \Psi \\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \wedge \neg\varphi & \text{A} \end{array}$$

- Παρατηρήσεις για ταυτολογικές συνεπαγωγές:

- μη ικανοποιήσιμο  $\models$  οτιδήποτε
- οτιδήποτε  $\models$  ταυτολογία
- ταυτολογία  $\models$  **μόνο** ταυτολογία
- **μόνο** μη ικανοποιήσιμο  $\models$  αντίφαση

# Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (I)

Αντιμεταθετική	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Προσεταιριστική	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
Επιμεριστική	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Διπλή άρνηση	$\neg \neg p \equiv p$
Αντικατάσταση συνεπαγωγής	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

# Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (II)

---

Αποκλεισμός τρίτου	$p \vee \neg p \equiv A$
Αντιθετοαναστροφή	$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
Εξαγωγή	$p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Άρνηση συνεπαγωγής	$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

# Παράδειγμα

---

- Απλοποίηση προτασιακού τύπου:

$$((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\dots \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$$

$$\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)))$$

$$\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi$$

$$\equiv (\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi)$$

$$\equiv \neg\psi \vee \neg\varphi$$

$$\equiv \neg(\psi \wedge \varphi)$$

# Παράδειγμα

- Υποπτος δηλώνει: «Λέω την αλήθεια ανν είμαι ένοχος».
  - Γνωρίζουμε ότι είτε λέει πάντα αλήθεια είτε πάντα ψέματα.
  - Μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ένοχος;
- $p \equiv$  «λέει αλήθεια»  
 $q \equiv$  «είναι ένοχος»
  - Δήλωση:  $p \leftrightarrow q$ .
  - Πρέπει να αληθεύει ότι:  
 $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ

# Παράδειγμα

- Ο κόσμος χωρίζεται σε ευγενείς και απατεώνες.
  - Ευγενείς: πάντα αλήθεια. Απατεώνες: πάντα ψέματα.
- Κάποιος δηλώνει:  
«Αν είμαι ευγενής, τότε η σύζυγός μου είναι ευγενής».
  - Είναι ευγενής; Η σύζυγός του;
- $p \equiv$  «άνδρας ευγενής»  
 $\equiv$  «άνδρας λέει αλήθεια»  
 $q \equiv$  «σύζυγος ευγενής»
  - Δήλωση:  $p \rightarrow q$ .
  - Πρέπει να αληθεύει ότι:  
 $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ



# Παραδείγματα

---

- Συναντάμε 3 ανθρώπους, Α, Β, Γ, και ρωτάμε τον Α αν είναι ευγενής:
  - Ο Α λέει κάτι, αλλά δεν τον ακούμε.
  - Ο Β πετάγεται και λέει: «Ο Α είπε ότι είναι απατεώνας».
  - Ο Γ λέει: «Μην τον πιστεύεις, ο Β είναι ψεύτης!».
- Είναι οι δηλώσεις: «το καλό φαγητό δεν είναι φθηνό» και «το φθηνό φαγητό δεν είναι καλό» ισοδύναμες;
  - Ισοδυναμία  $k \rightarrow \neg\varphi$  και  $\varphi \rightarrow \neg k$  ;
- Είναι το «αυτή η πρόταση είναι ψευδής» **μαθ.** πρόταση;
  - Μπορεί να είναι αληθής; Ψευδής;

# Μαθηματική Λογική

---

- Αντικείμενο: θεμελίωση των μαθηματικών.
  - Πότε μια πρόταση ισχύει / μια απόδειξη είναι σωστή;
  - **Σημασιολογικά**: συμπέρασμα έπεται αναγκαία από υποθέσεις.
    - Ενδιαφέρει αλλά δεν ελέγχεται (αποδοτικά).
  - **Συντακτικά**: όταν στην **αποδεικτική διαδικασία εφαρμόζουμε** σωστά συγκεκριμένους **κανόνες** (συντακτικής φύσης).
    - Διατύπωση με νοημοσύνη – «μηχανιστικός» έλεγχος.
  - Ζητούμενο **ισοδυναμία**: σωστές «συντακτικά» **αποδείξεις** θεμελιώνουν (**όλες και μόνο τις**) «σημασιολογικά» σωστές **προτάσεις**.
    - Εγκυρότητα – Πληρότητα.

# Συντακτική Προσέγγιση – Προτασιακός Λογισμός

---

- Αξιωματικό Σύστημα (όχι μοναδικό):
  - ΑΣ1:  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - ΑΣ2:  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  - ΑΣ3:  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$
- Αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens: 
$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$
- Ξεκινώντας από **αξιώματα** (ή υποθέσεις, ή τυπικά θεωρήματα), και **μόνο** με **συντακτική αντικατάσταση** και **MP**, αποδεικνύουμε **τυπικά θεωρήματα**.
  - $\vdash \varphi$  :  $\varphi$  είναι τυπικό θεώρημα.
  - $T \vdash \varphi$  :  $\varphi$  αποδεικνύεται τυπικά από υποθέσεις  $T$ .

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Αποδείξεις

---

□ Τυπική απόδειξη για  $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

1.  $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$

ΑΣ2 με  $(\varphi, \varphi)$ ,  $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$ , και  $(\chi, \varphi)$

2.  $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \varphi)$ ,  $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$

3.  $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

1, 2, MP

4.  $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \varphi)$ ,  $(\psi, \varphi)$

5.  $\varphi \rightarrow \varphi$

3, 4, MP

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Αποδείξεις

□ Τυπική απόδειξη για  $\neg\varphi \vdash (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$

1.  $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$  ΑΣ3 με  $(\varphi, \psi)$  και  $(\psi, \varphi)$

2.  $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$  ΑΣ1 με  $(\varphi, \neg\varphi)$  και  $(\psi, \neg\psi)$

3.  $\neg\varphi$  Υπόθεση

4.  $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$  2, 3, MP

5.  $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$  1, 4, MP

■ Ποια από τα παρακάτω προκύπτουν **άμεσα** από αξιώματα;

■  $\varphi \rightarrow \varphi$

■  $\chi \rightarrow (\chi \rightarrow \chi)$

■  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$

■  $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi)$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Απόδειξεις

□ Είναι σωστή τυπική απόδειξη για  $\psi \mid - (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

1.  $\psi$

Υπόθεση

2.  $\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \psi)$  και  $(\psi, \neg\varphi)$

3.  $\neg\varphi \rightarrow \psi$

2, 1, MP

4.  $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ3 με  $(\varphi, \varphi)$  και  $(\psi, \neg\psi)$

5.  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

4, 3, MP

■ Το βήμα 4 είναι **λάθος!!!**

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

# Τυπικές Αποδείξεις

□ Σωστή τυπική απόδειξη για  $\neg\neg\psi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

1.  $\neg\neg\psi$

Υπόθεση

2.  $\neg\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$

ΑΣ1 με  $(\varphi, \neg\neg\psi)$  και  $(\psi, \neg\varphi)$

3.  $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$

2, 1, MP

4.  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$

ΑΣ3 με  $(\varphi, \varphi)$  και  $(\psi, \neg\psi)$

5.  $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

4, 3, MP

■ Με χρήση του  $\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi$  μπορούμε να αποδείξουμε και ότι  $\psi \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

# Τυπικές Αποδείξεις

- Θεώρημα Απαγωγής:  $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- Θ. Αντιθετοαναστροφής:  $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \Leftrightarrow T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

- Τυπική απόδειξη για  $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

$$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta.\text{Απαγ.}}{\Leftrightarrow} \varphi \vdash \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta.\text{Αν/φης}}{\Leftrightarrow} \neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

- Για νδο  $\vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \dots$

- ... αρκεί νδο  $\{\varphi \rightarrow \chi, \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi), \varphi\} \vdash \psi$ .

1.  $\varphi$  Υπόθεση
2.  $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$  Υπόθεση
3.  $\chi \rightarrow \psi$  2, 1, MP
4.  $\varphi \rightarrow \chi$  Υπόθεση
5.  $\chi$  4, 1 MP
6.  $\psi$  3, 5, MP



# Συντακτική vs Σημασιολογική Προσέγγιση

## Σημασιολογική Προσέγγιση

- ταυτολογία:  $\models \varphi$
- ταυτολ. συνεπαγωγή  $T \models \varphi$
- **ικανοποιήσιμο**  $T$
- μη ικανοποιήσιμο  $T$
- αν  $T$  μη ικανοποιήσιμο,  
τότε  $T \models \varphi$ , για κάθε  $\varphi$ .

□ Εγκυρότητα:  $\forall T, \forall \varphi, T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

□ Πληρότητα:  $\forall T, \forall \varphi, T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

## Συντακτική Προσέγγιση

- τυπικό θεώρημα:  $\vdash \varphi$
- απόδειξη με υποθέσεις  $T \vdash \varphi$
- **συνεπές**  $T$ :  $\nexists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg \varphi)$
- **αντιφατικό**  $T$ :  $\exists \varphi (T \vdash \varphi \text{ και } T \vdash \neg \varphi)$   
 $\forall \varphi T \vdash \varphi$
- αν  $T$  αντιφατικό,  
τότε  $T \vdash \varphi$ , για κάθε  $\varphi$ .

# Παραδείγματα

---

- Είναι οι δηλώσεις: «το καλό φαγητό δεν είναι φθηνό» και «το φθηνό φαγητό δεν είναι καλό» ισοδύναμες;
  - Ισοδυναμία  $k \rightarrow \neg\varphi$  και  $\varphi \rightarrow \neg k$  ;
- Είναι το «αυτή η πρόταση είναι ψευδής» **μαθ.** πρόταση;
  - Μπορεί να είναι αληθής; Ψευδής;
- Δείτε ακόμη:
  - Liu, ενότητα 1.8 (σελ. 33-40), ασκήσεις 1.65-1.74.
    - Παραδείγματα: 1.15, 1.16, 1.17, και 1.18.
    - Ασκήσεις: 1.69-1.74.
  - Rosen, ενότητες 1.1, 1.2, και (εν μέρει) 1.3.
  - Epp, ενότητες 1.1, 1.2, και 1.3.

# Ασκήσεις

---

□ Έστω  $T$  **άπειρο** σύνολο π.τ. και  $\varphi$  π.τ.

Νδο αν  $T \models \varphi$ , τότε υπάρχει πεπερασμένο  $T_0 \subseteq T$  ώστε  $T_0 \models \varphi$ .

■  $T \models \varphi$

■ (Πληρότητα)  $\Rightarrow T \vdash \varphi$

■ (πεπερασμένο τυπ. αποδ.)  $\exists$  πεπερ.  $T_0 \subseteq T$  ώστε  $T_0 \vdash \varphi$

■ (Εγκυρότητα)  $\Rightarrow \exists$  πεπερ.  $T_0 \subseteq T$  ώστε  $T_0 \models \varphi$

# Ασκήσεις

---

- Έστω  $T$  **άπειρο** σύνολο π.τ. και  $\varphi$  π.τ.  
Αν  $T \models \varphi$ , τότε υπάρχει πεπερασμένο  $T_0 \subseteq T$  ώστε  $T_0 \models \varphi$ .
- Να αποδείξετε το  $\Theta$ . Συμπάγειας:
  - Έστω  $T$  άπειρο σύνολο π.τ. Αν **κάθε** πεπερασμένο υποσύνολο του  $T$  είναι **ικανοποιήσιμο**, τότε το  $T$  είναι **ικανοποιήσιμο**.
- Απαγωγή σε άτοπο: έστω ότι **κάθε** πεπερασμένο υποσύνολο του  $T$  είναι **ικανοποιήσιμο** αλλά το  $T$  **δεν** είναι **ικανοποιήσιμο**.
  - Θεωρούμε αντίφαση  $\varphi$ , άρα  $\neg\varphi$  ταυτολογία.
  - $T$  μη ικανοποιήσιμο  $\Rightarrow T \models \varphi$
  - (προηγούμενο)  $\Rightarrow \exists$  πεπερ.  $T_0 \subseteq T$  ώστε  $T_0 \models \varphi$
  - $\Rightarrow \exists$  πεπερ.  $T_0 \subseteq T$  ώστε  $T_0 \cup \{\neg\varphi\}$  μη ικανοποιήσιμο
  - ( $\neg\varphi$  ταυτολογία)  $\Rightarrow T_0$  μη ικανοποιήσιμο, **άτοπο!**