ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Διακριτα Μαθηματικα

Συνολοθεωρια

Περιεχόμενα

0.1 Βασικες Εννοιες - Σύνολα

Συχνά, στην καθημερινή ζωή αναφερόμαστε στην έννοια αντικείμενο. Τι εννοούμε, όμως, ως αντικείμενο; Ο όρος αντικείμενο χρησιμοποιείται από διάφορους κλάδους επιστημών με παραπλήσιες μεν σημασίες, αλλά κατά το πλείστων με προσπάθεια περιορισμού της αφαιρετικότητας της έννοιας. Σε αυτό το μάθημα θα χρησιμοποιήσουμε αυτούσια την έννοια του όρου αντικείμενο χωρίς περιορισμό της γενικότητας και αφαιρετικότητας του. Έτσι, αντικείμενο είναι ένα τραπέζι, ένας φοιτητής, ένας αριθμός, ένα συναίσθημα, δηλαδή οτιδήποτε μπορεί να αποκτήσει το χαρακτηρισμό οντότητα (να ορίζεται ως έννοια από την καθομιλουμένη γλώσσα).

Κατανοώντας την έννοια του αντικειμένου μπορούμε να παρατηρήσουμε κάποιες ιδιότητες-σχέσεις οι οποίες μπορούν είτε να διαχωρίσουν, είτε να ομαδοποιήσουν τα αντικείμενα. Για παράδειγμα, έχοντας ένα πρόγραμμα σπουδών, μπορούμε να το αντιληφθούμε είτε ως σειρές μαθημάτων (θεωρούμε σαν αντικείμενο μια σειρά μαθημάτων) είτε ως μαθήματα (θεωρούμε σαν αντικείμενο ένα μάθημα). Διαφορετικά, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάνουμε μια τυπική σύμβαση, κάθε φορά, στο ποιος είναι ο δομικός λίθος - αντικείμενο. Σαν αποτέλεσμα, ανάλογα με την θεώρηση που ακολουθούμε, μπορούμε ερμηνεύσουμε κάποια αντικείμενα ως ξεχωριστά ή ότι είναι δομικοί λίθοι για την δημιουργία άλλων αντικειμένων (δηλαδή υπάρχει μια εξάρτηση μεταξύ τους, έτσι ώστε όλα μαζί να αποτελούν μια οντότητα). Τα αντικείμενα τα οποία είναι πλήρως διαφορετικά μεταξύ τους, συμφωνα με μια αρχικη θεωρηση μας, καλούνται **διακριτά αντικείμενα**. Στο προηγούμενο παράδειγμα μπορούμε να κατανοήσουμε ότι αν εξετάζουμε σειρές μαθημάτων, για τα μαθήματα δεν υφίσταται τρόπος να τα διαχωρίσουμε, είτε μεταξύ τους είτε απο τις σειρές μαθημάτων, γιατί υπάρχει, λόγω αρχικής σύμβασης, μόνο η έννοια της σειράς μαθημάτων ως οντότητα.

Αλλάζοντας οπτική γωνία, για να εκφράσουμε την σημασία της ομαδοποίησης αντικειμένων, εκμεταλλευόμενοι κάποιες ιδιότητες των αντικείμενων, ορίζουμε την έννοια του σύνολου. **Σύνολο** είναι μια συλλογή διακεκριμένων-διακριτών αντικείμενων, όπου τα αντικείμενα ονομάζονται **στοιχεία** ή **μέλη** του συνόλου. Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα θεωρούμε μια σειρά μαθημάτων - κατεύθυνση με ονομασία "Λογισμικό Η/Υ", η οποία περιέχει τα μαθήματα με κωδικούς ΗΥ200, ΗΥ201, ΗΥ202, ΗΥ203 και μια άλλη σειρά μαθημάτων - κατεύθυνση "Επικοινωνίες και Δίκτυα Υπολογιστών", η οποία περιέχει τα μαθήματα με κωδικούς ΗΥ400, ΗΥ401, ΗΥ402. Θέλοντας να παραστήσουμε ένα σύνολο κατευθύνσεων μπορούμε να ορίσουμε αυτό με στοιχεία τα "Λογισμικό Η/Υ" και "Επικοινωνίες και Δίκτυα Υπολογιστών". ΔΕΝ μπορούμε όμως να εντάξουμε σε ένα τέτοιο σύνολο στοιχείο κάποιο κωδικό μαθήματος διότι η θεώρηση μας είναι ότι θέλουμε σύνολο κατευθύνσεων.

Συμβολισμοί: έχοντας ένα σύνολο Α με στοιχεία α, β, γ, δ ένας τρόπος αναπαράστασης του είναι η καταγραφή όλων των στοιχείων του και μόνο αυτών αναλυτικά μέσα σε άγκιστρα και χωριζόμενα μεταξύ τους με κόμματα, δηλαδή Α={α,β,γ,δ}. Ένας άλλος τρόπος είναι χρησιμοποιώντας κάποια κοινή ιδιότητα των στοιχείων π.χ. το σύνολο των μαθημάτων της κατεύθυνσης "Επικοινωνίες και Δίκτυα Υπολογιστών" (για λόγω συντομίας το συμβολίζουμε Ε) που περιέχει, όπως γνωρίζουμε, ως μοναδικά μαθήματα τα ΗΥ400, ΗΥ401, ΗΥ402 (στοιχεία συνόλου) και μπορεί να εκφραστεί με την αναλυτική καταγραφή ως Ε={ΗΥ400, ΗΥ401, ΗΥ402} μπορεί να περιγραφεί και ως Ε={x|x είναι μάθημα της κατεύθυνσης "Επικοινωνίες και Δίκτυα Υπολογιστών"} (δηλαδή το Ε περιέχει όλα τα x όπου x είναι μάθημα της κατεύθυνσης "Επικοινωνίες και Δίκτυα Υπολογιστών"). Ένα άλλο παράδειγμα καταγραφής χρησιμοποιώντας κάποια ιδιότητα των στοιχείων του συνόλου είναι Α={2,4,6,8,10}={x|x είναι άρτιος και 2≤ x ≤10} Όταν επιθυμούμε να δηλώσουμε ότι ένα αντικείμενο α είναι στοιχείο ενός σύνολου Σ λέμε οτι το "*α ανήκει στο σύνολο Σ*" ($\alpha \in \Sigma$), ενώ αντίστοιχα αν α δεν είναι στοιχείο του συνόλου Σ λέμε ότι το "*α δεν ανήκει στο σύνολο Σ*" ($\alpha \notin \Sigma$).

Παρατηρήσεις:

- Πολλές φορές προκύπτει το πρόβλημα της εμφάνισης δυο ή τρεις ή … ν φορές του ίδιου στοιχείου στο ίδιο σύνολο π.χ. Α={α, α, α, α, α, β, γ, γ, γ, δ, ε, ε, ε, ε, ζ, ζ}. Λόγω ορισμού αυτό δεν επιτρέπεται, έτσι κάθε επανάληψη στοιχείου θεωρείται περιτή και κάθε τέτοιο σύνολο αντιστοιχίζεται σε ένα σύνολο με μοναδικότητα στην εμφάνιση των στοιχείων του. Άρα το παραπάνω σύνολο Α είναι το ίδιο με το Α={α, β, γ, δ, ε, ζ}, δηλαδή δεν λαμβάνεται υπόψιν καμία επανάληψη στοιχείου. Στην βιβλιογραφία έχει αναφερθεί η έννοια σακί (*bag*) σε αντίθεση με την έννοια του συνόλου (*set*) που είναι διαισθητικά ένα σύνολο που έχουν ουσία τόσο οι επαναλήψεις στοιχείων όσο και ο αριθμός επαναλήψεων.
- Στα σύνολα εξ' ορισμού τα στοιχεία δεν είναι διατεταγμένα. Η έννοια της διάταξη ορίζεται σαν μια πρόσθετη "ιδιότητα" κάποιων συνόλων. Έτσι το σύνολο των φυσικών αριθμών ακολουθώντας αυστηρά τον ορισμό του συνόλου γράφεται ως Σ={2,1,10,37,.... }.
- Ο ορισμός των συνόλων μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε και σύνολα με στοιχεία σύνολα. Η ελευθέρια του ορισμού αποτυπώθηκε έμμεσα στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου οι δυο κατευθύνσεις που ορίσαμε είναι σύνολα με στοιχεία μαθήματα αλλά και ο οδηγός σπουδών είναι ένα σύνολο από κατευθύνσεις δηλαδή σύνολο με στοιχεία του τα σύνολα κατευθύνσεις. Έτσι έχουμε ορισμό του συνόλου οδηγός σπουδών(ΟΣ): Σ= {"Λογισμικό Η/Υ", "Επικοινωνίες και Δίκτυα Υπολογιστών"} και αναλύοντας τα σύνολα-στοιχεία έχουμε ισοδύναμο τον ορισμό ΟΣ= {{ΗΥ200, ΗΥ201, ΗΥ202, ΗΥ203}, {ΗΥ400, ΗΥ401, ΗΥ402}}. *ΠΡΟΣΟΧΗ:* Όπως αναφέραμε στην αρχή πρέπει να κατανοήσουμε κάθε φορά τι θεωρούμε ως αντικείμενα-στοιχεία και ποια είναι η θεώρηση μας κάθε φορά. Συχνά παρατηρείται σύγχυση στην σωστή αντιστοίχιση στοιχείων σε σύνολα όταν έχουμε σύνολα συνόλων. Έτσι για το παραπάνω παράδειγμα, αν ονομασουμε Α,Β αντιστοιχα τα συνολα "Λογισμικό Η/Υ", "Επικοινωνίες και Δίκτυα Υπολογιστών", έχουμε:
  - Α∈ΟΣ
  - Β∈ΟΣ

- Α$\notin$Β
- ΗΥ200$\in$Α, ΗΥ200$\notin$Β, ΗΥ200$\notin$ΟΣ
- ΗΥ201$\in$Α, ΗΥ200$\notin$Β, ΗΥ200$\notin$ΟΣ
- ΗΥ202$\in$Α, ΗΥ200$\notin$Β, ΗΥ200$\notin$ΟΣ
- ΗΥ203$\in$Α, ΗΥ200$\notin$Β, ΗΥ200$\notin$ΟΣ
- ΗΥ400$\in$Β, ΗΥ200$\notin$Α, ΗΥ200$\notin$ΟΣ
- ΗΥ401$\in$Β, ΗΥ200$\notin$Α, ΗΥ200$\notin$ΟΣ
- ΗΥ402$\in$Β, ΗΥ200$\notin$Α, ΗΥ200$\notin$ΟΣ

Το σύνολο το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο ονομαζεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται: $\{\}$ ή $\emptyset$.
Έχοντας δυο συνολα Α,Β, οριζουμε ότι **το Α ειναι υποσυνολο του Β** ανν κάθε στοιχειο του Α ανήκει και στο Β και συμβολίζεται: Α$\subseteq$Β. Δηλαδη Α$\subseteq$Β ανν $\forall x \in A$ ισχύει ότι $x \in B$. Αντιστοιχα αν ενα συνολο Γ δεν ειναι υποσυνολο του Α συμβολίζουμε: Α$\not\subseteq$Γ

Παρατηρήσεις:

- Για κάθε σύνολο Α ισχύει $\{\} \subseteq A$ (το $\emptyset$ ειναι υποσύνολο κάθε συνόλου, δεν είναι, όμως απαραίτητα, και στοιχείο κάθε συνόλου).
- ΠΡΟΣΟΧΗ: Συχνά γίνεται σύγχυση των εννοιών του υποσυνόλου και στοιχείου ενός συνόλου. Έστω το σύνολο Α= $\{\emptyset, 6, \{3, \{6\}\}, \{5\}\}$. Ας σημειώσουμε, ενδεικτικά, κάποιες σχέσεις υποσυνόλων του συγκεκριμένου παραδείγματος, όπως και κάποια αντικείμενα αν είναι στοιχεία ή όχι καποιων συνόλων, έτσι ώστε να γινει πιο κατανοητή η διάκριση των εννοιών:
  - $\emptyset \subseteq A$ και $\emptyset \in A$
  - $\{\emptyset\} \subseteq A$ και
  - $\{\emptyset\} \notin A$
  - $\emptyset \subseteq \{5\}$ αλλά $\{\emptyset\} \not\subseteq \{5\}$ και $\{\emptyset\} \notin \{5\}$
  - $\emptyset \subseteq \{3, \{6\}\}$ αλλά $\{\emptyset\} \not\subseteq \{3, \{6\}\}$ και $\{\emptyset\} \notin \{3, \{6\}\}$
  - $\emptyset \subseteq \{6\}$ αλλά $\{\emptyset\} \not\subseteq \{6\}$ και $\{\emptyset\} \notin \{6\}$
  - $\{\{\emptyset\}\} \not\subseteq A$
  - $\{\{3, \{6\}\}\} \subseteq A$
  - $\{3, \{6\}\} \not\subseteq A$
  - $\{\emptyset, \{3, \{6\}\}\} \subseteq A$
  - $\{\{5\}\} \subseteq A$
  - $\{5\} \not\subseteq A$
  - $5 \not\subseteq A$
  - $\{6\} \subseteq A$

– $(6 \in A), (\{6\} \in \{3, \{6\}\})$ και $(6 \in \{6\})$ αλλά $(6 \notin (\{3, \{6\}\}), (\{6\} \notin A)$
– $\{5\} \in A$ και $5 \in \{5\}$ αλλά $5 \notin A$
– $\{\emptyset, \{5\}\} \notin A$
– $\{3, \{6\}\} \in A$ αλλά $\{\{3, \{6\}\}\} \notin A$
– $3 \in \{3, \{6\}\}$ αλλά $3 \notin A$

Ισότητα συνόλων: δυο συνολα Α,Β ονομάζονται **ίσα** όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, ή αλλιώς είναι **ίσα** όταν ισχύει $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Αν δεν ισχύει η ισότητα συμβολίζουμε $A \neq B$

Γνήσιο υποσυνολο: Για δυο σύνολα Α,Β ορίζουμε ότι το Α είναι **γνήσιο υποσύνολο** του Β (συμβολίζεται $A \subset B$) αν το Β περιέχει όλα τα στοιχεία του Α και κάποιο/α επιπλέον, δηλαδή $A \subset B$ όταν $A \subseteq B$ και ταυτόχρονα $A \neq B$.

Ιδιότητες:

- Για κάθε σύνολο Α ισχύει $A \subseteq A$
- Για σύνολα Α,Β αν ισχύει $A \subset B$ τότε ισχύει $A \subseteq B$
- Για σύνολα Α,Β,Γ αν ισχύουν $A \subset B$ και $B \subset G$ τότε ισχύει $A \subset G$. Το ίδιο ισχύει και για το $\subseteq$

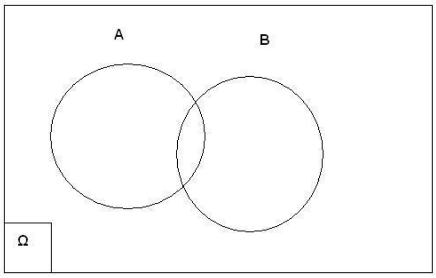
0.2 Διαγραμματα Venn

Ένας τρόπος αναπαράστασης, γραφικά, των συνόλων και κάποιων σχέσεων ανάμεσα τους είναι με τα **Διαγραμματα Venn** . Πως ομως τα σχηματίζουμε; Δημιουργούμε ένα τετράγωνο που παριστάνει το σύμπαν μας (είναι ένα σύνολο που περιέχει αντικείμενα πιθανά να ανήκουν ως στοιχεία σε κάποιο/α σύνολο/α της εφαρμογής μας - διαισθητικά είναι ένα σύνολο όλων των πιθανών αντικειμένων που έχουν ουσία. Συμβολίζεται με $\mathbf{\Omega}$).Επίσης κάθε σύνολο το παριστάνουμε με ένα κύκλο-σχήμα μέσα στο τετράγωνο.

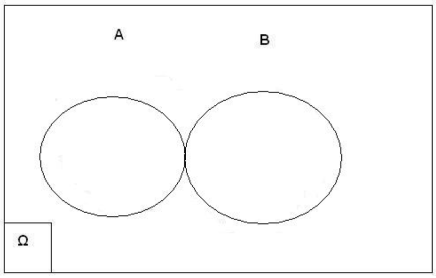
1. Αν δυο σύνολα έχουν κοινά στοιχεία τότε υπάρχει μέρος των κύκλων τους επικαλύπτονται.
2. Αν έχουν μόνο ένα κοινό σημείο τότε οι κύκλοι τους εφάπτονται.
3. Τέλος σε κάθε άλλη περίπτωση δεν υπάρχουν κοινά σημεία μεταξύ των αντίστοιχων κύκλων τους.

Δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό συνόλων που αναπαριστούμε σ' ένα συγκεκριμένο διάγραμμα.
Ας δούμε ένα παράδειγμα για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις (αντιστοιχιση αριθμου με σχημα):

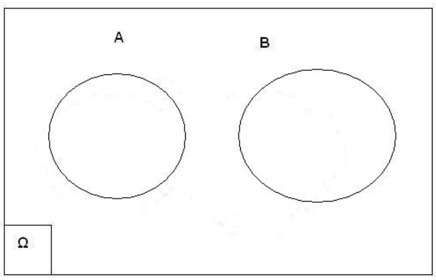
(1)



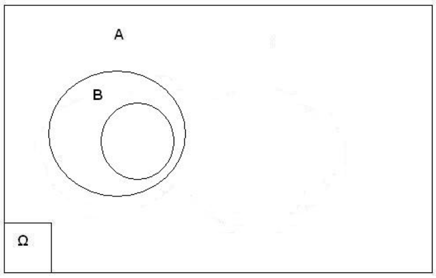
(2)



(3)



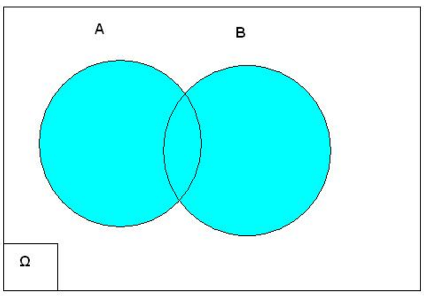
Επίσης ειναι προφανές οτι η αναπαράσταση της εννοιας υποσυνολου ειναι η παρακάτω (για A,B συνολα με $A \subseteq B$)



0.3 Πράξεις συνόλων

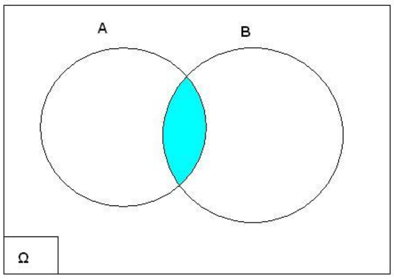
Η χρησιμότητα της έννοιας των συνόλων συμπληρώνεται από την ύπαρξη κάποιων πράξεων μεταξύ τους, έτσι ώστε να έχουμε τη ευχέρεια συνδυασμού τους. Απαριθμούμαι παρακάτω κάποιες από τις πιο σημαντικές πράξεις συνόλων χρησιμοποιώντας διαγράμματα Venn για περισσότερη σαφήνεια (το αποτέλεσμα ειναι το γραμμοσκιασμένο μέρος).
Έστω σύνολα Α,Β τότε ορίζουμε τις πράξεις:

1. Ένωση $(A \cup B)$: Είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο Α είτε στο Β (όλα τα στοιχεία και των δυο συνόλων), δηλαδη $A \cup B = \{x | x \in A \text{ ή } x \in B\}$

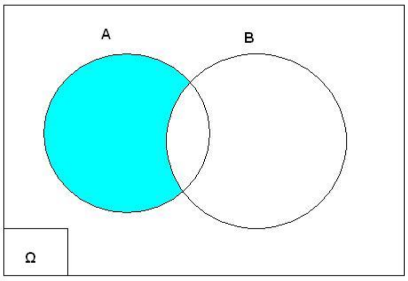


2. Τομή $(A \cap B)$: Είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν

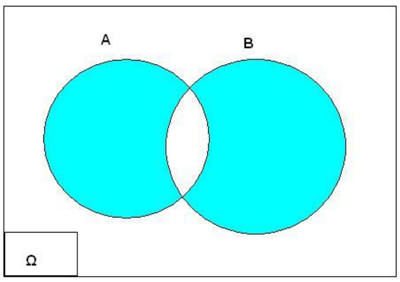
και στο A και στο B (κοινά στοιχεία), δηλαδη $A \cap B = \{x | x \in A$ και $x \in B\}$



3. Διαφορά $(A - B)$: Είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στο B (όλα τα στοιχεία του A εκτός των κοινών στοιχείων του με το B), δηλαδη $A - B = \{x | x \in A$ και $x \notin B\}$

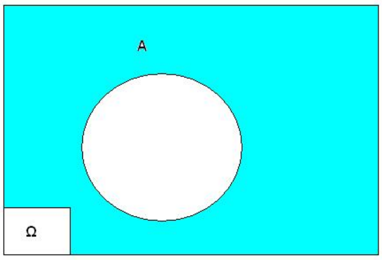


4. Συμμετρική Διαφορά $(A \oplus B)$: Είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν είτε μόνο στο A είτε μόνο στο B (όλα τα στοιχεία και των δυο εκτός από τα κοινά τους), δηλαδη $A \oplus B = \{x | x \in A$ ή $x \in B$ και $x \notin A \cap B\}$



5. Συμπλήρωμα (A^C ή $\overline{A}$): Είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που δεν ανήκουν στο A (όλα τα στοιχεία του Ω εκτός από αυτά του A), δηλαδη

$A^C = \{x | x \notin A\}$



Παρατηρήσεις: Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς παρατηρούμε κάποια σχέση ανάμεσα σε κάποιες πράξεις έτσι δίνουμε μια ισοδύναμη έκφραση των $A - B$ και AB χρησιμοποιώντας τις πράξεις της τομής του συμπληρώματος και της ένωσης:

- $A - B = A \cap B^C$
- $A \oplus B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$

Ιδιότητες πράξεων:

1. Κενό σύνολο:
    - $\emptyset \cup A = A$
    - $\emptyset \cap A = \emptyset$
2. σύμπαν:
    - $\Omega \cup A = \Omega$
    - $\Omega \cap A = A$
3. Μεταθετικότητα:
    - $A \cup B = B \cup A$
    - $A \cap B = B \cap A$
    - $A \oplus B = B \oplus A$
4. Προσεταιριστικότητα:
    - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
    - $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
5. Αυτοπάθεια:
    - $A \cup A = A$

- $A \cap A = A$
- ενώ $A \oplus A = \emptyset$

6. Απορρόφηση:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

(Όλες οι ιδιότητες μπορούν να αποδειχτούν εύκολα με χρήση διαγραμμάτων $Venn$)