Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης

3η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Άσκηση 1 (Κατηγορηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall x P(x,x) \land \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(y,z) \to P(x,z)) \land \forall x \forall y (P(x,y) \lor P(y,x))] \to \exists y \forall x P(y,x)$$

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ.
2. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ.

Λύση. (1) Έστω ερμηνεία $\mathcal{A}$ με πεπερασμένο (μη-κενό) σύμπαν A. Παρατηρούμε ότι λόγω της υπόθεσης, η πρόταση φ αφορά σε σχέσεις P με τις παρακάτω ιδιότητες: (i) ανακλαστική ιδιότητα, $\forall x P(x,x)$, (ii) μεταβατική ιδιότητα, $\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(y,z) \to P(x,z))$, και (iii) ότι για κάθε ζεύγος στοιχείων, κάποιο σχετίζεται με το άλλο, $\forall x \forall y (P(x,y) \lor P(y,x))$ (στην συνέχεια, θα αναφερόμαστε σε αυτή την ιδιότητα ως Ιδ3, χάριν συντομίας). Αν η σχέση P δεν έχει κάποια από τις παραπάνω ιδιότητες στην $\mathcal{A}$, τότε η φ αληθεύει τετριμμένα, ως συνεπαγωγή με ψευδή υπόθεση. Αν η σχέση P έχει τις τρεις παραπάνω ιδιότητες, τότε η φ αληθεύει ανν υπάρχει στοιχείο του A που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.

Η απόδειξη είναι με επαγωγή στον αριθμό των στοιχείων του $|A|$. Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, εστιάζουμε στην περίπτωση που η P έχει τις τρεις παραπάνω ιδιότητες στην $\mathcal{A}$.
Βάση της επαγωγής: Έστω $|A| = 1$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ στο A. Αν η P είναι ανακλαστική, το μοναδικό στοιχείο του σύμπαντος P-σχετίζεται με τον εαυτό του. Διαφορετικά, η φ αληθεύει γιατί έχει ψευδή υπόθεση. Άρα η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}$.
Επαγωγική Υπόθεση: Για αυθαίρετα επιλεγμένο φυσικό $n \geq 1$, θεωρούμε σύμπαν $A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}$ στο A, και υποθέτουμε ότι η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}$. Δηλαδή υποθέτουμε ότι αν η P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3 στην $\mathcal{A}$, τότε υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.
Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε σύμπαν $A' = A \cup \{\alpha_{n+1}\}$ και αυθαίρετη ερμηνεία $\mathcal{A}'$ στο A'. Θα δείξουμε ότι η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3 στην $\mathcal{A}'$ (διαφορετικά η φ αληθεύει επειδή έχει ψευδή υπόθεση). Παρατηρούμε ότι η P διατηρεί αυτές τις ιδιότητες αν περιορίσουμε την ερμηνεία $\mathcal{A}'$ στο A (δηλ. αν αγνοήσουμε προσωρινά το στοιχείο α_{n+1}). Συνεπώς, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, υπάρχει στοιχείο $\alpha \in A$ που P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A.

Για να εξετάσουμε την τιμή αλήθειας της φ στην $\mathcal{A}'$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Αν το $P(\alpha, \alpha_{n+1})$ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$, τότε το στοιχείο α P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A', και η φ αληθεύει. Αν το $P(\alpha, \alpha_{n+1})$ δεν αληθεύει, πρέπει λόγω της Ιδ3, να αληθεύει ότι $P(\alpha_{n+1}, \alpha)$. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, το στοιχείο α P-σχετίζεται με κάθε στοιχείο $\alpha_i \in A$. Άρα, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, το στοιχείο α_{n+1} P-σχετίζεται με κάθε στοιχείο $\alpha_i \in A$. Επιπλέον, λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας, το α_{n+1} P-σχετίζεται με τον εαυτό του. Άρα το στοιχείο α_{n+1} P-σχετίζεται με όλα τα στοιχεία του A', και η φ αληθεύει. Συνεπώς η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}'$.

(2) Εφόσον όλες οι ερμηνείες με πεπερασμένο σύμπαν είναι μοντέλα της φ, πρέπει να εξετάσουμε ερμηνείες με άπειρο σύμπαν. Έστω ότι το σύμπαν είναι οι φυσικοί αριθμοί και ότι το κατηγορηματικό σύμβολο P ερμηνεύεται με την σχέση "μεγαλύτερο ή ίσο" (δηλ. το $P(x, y)$ αληθεύει ανν $x \geq y$). Σε αυτή την ερμηνεία, η σχέση P είναι ανακλαστική, μεταβατική, και έχει την Ιδ3. Όμως, δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος ή ίσος όλων των φυσικών (το σύνολο των φυσικών αριθμών εκτείνεται στο άπειρο, δεν είναι φραγμένο άνω). Επομένως η φ δεν αληθεύει σε αυτή την ερμηνεία. □

Άσκηση 2 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από $n^2 + 1$ διαφορετικούς ακεραίους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από $n^2 + 1$ διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων της μορφής (a_k, k), $k \in \{1, \ldots, n^2 + 1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ *και* $k \leq \ell$ (όπου $\leq$ η συνήθης διάταξη των αριθμών).

1. Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
2. Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R);
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$.

Λύση. (1) Η σχέση R είναι *ανακλαστική* γιατί για κάθε $k \in \{1, \ldots, n^2 + 1\}$, $a_k \leq a_k$ και $k \leq k$, άρα $((a_k, k), (a_k, k)) \in R$. Η σχέση R είναι *μεταβατική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)), ((a_\ell, \ell), (a_j, j)) \in R$, έχουμε ότι $a_k \leq a_\ell \leq a_j$ και ότι $k \leq \ell \leq j$, και συνεπώς $((a_k, k), (a_j, j)) \in R$. Η σχέση R είναι *αντισυμμετρική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ με $k \neq \ell$, έχουμε ότι $((a_\ell, \ell), (a_k, k)) \notin R$, γιατί $\ell > k$. Άρα η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης.
(2) Κάθε αλυσίδα μήκους m της R αντιστοιχεί σε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Πράγματι, τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \ldots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αλυσίδα μήκους m της R ανν (λόγω του ορισμού της R) $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \cdots \leq a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$ αποτελεί μια αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$.

Κάθε αντιαλυσίδα μεγέθους m της R αντιστοιχεί σε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι αν τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \ldots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αντιαλυσίδα της R, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ (δηλ. απαριθμούμε τα στοιχεία της αντιαλυσίδας σε αύξουσα σειρά των δεικτών τους). Επομένως τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \ldots, (a_{k_m}, k_m)$, $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$, αποτελούν μια αντιαλυσίδα μεγέθους m της R ανν $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και (λόγω του ορισμού της R) $a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$ αποτελεί μια φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$.
(3) Αποτελεί άμεση συνέπεια του (2) και του ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R) είτε περιέχει μια αλυσίδα μήκους n είτε περιέχει μια αντιαλυσίδα μεγέθους n. □