

# Συνδυαστική Απαρίθμηση

---

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Συνδυαστική Απαρίθμηση

---

- Υπολογισμός (με συνδυαστικά επιχειρήματα) του **πλήθους των διαφορετικών αποτελεσμάτων** ενός «πειράματος».
  - «Πείραμα»: διαδικασία με συγκεκριμένο (πεπερασμένο) σύνολο παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.
    - Π.χ. ρίψη ζαριών, μοίρασμα τράπουλας, ανάθεση γραφείων, επιλογή password, βάδες Lotto, ...
  - Πληθάριθμος δυναμοσυνόλου: αν  $|A| = n$ , τότε  $|P(A)| = 2^n$
- Βασικές αρχές και έννοιες:
  - Κανόνες **γινομένου** και **αθροίσματος**, αρχή **εγκλεισμού** – **αποκλεισμού**.
  - **Διατάξεις** και **μεταθέσεις** (με ή χωρίς) επανάληψη.
  - **Συνδυασμοί** (με ή χωρίς) επανάληψη.

# Κανόνας Γινομένου

---

- Πείραμα  $A$  με  $n$  αποτελέσματα. Πείραμα  $B$  με  $m$  αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα  $A$  και  $B$  είναι **ανεξάρτητα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων  $A$  και  $B$  έχει  $n \times m$  αποτελέσματα.
  - **Ανεξάρτητα**: το αποτέλεσμα του  $A$  δεν επηρεάζει (ως προς τον αριθμό των αποτελεσμάτων) το αποτέλεσμα του  $B$ , και αντίστροφα.
    - Π.χ.  $|A \times B| = |A| \times |B|$
  - Επιλογή ενός ψηφίου 0-9 και ενός κεφαλαίου Ελληνικού γράμματος:
    - $10 \times 24 = 240$  διαφορετικά αποτελέσματα.
  - #συμβ/ρών (με κεφαλαία Ελληνικά) μήκους 10:  $24^{10}$
  - #παλινδρομικών συμβ/ρών μήκους 10:  $24^5$
  - #συναρτήσεων από  $A$  στο  $B$  ( $|A| = n$ ,  $|B| = m$ ):  $m^n$
  - #συναρτήσεων **1-1** από  $A$  στο  $B$  ( $m \geq n$ ):  $m(m-1) \cdots (m-n+1)$

# Κανόνας Αθροίσματος

---

- Πείραμα  $A$  με  $n$  αποτελέσματα. Πείραμα  $B$  με  $m$  αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα  $A$  και  $B$  είναι **αμοιβαία αποκλειόμενα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων  $A$  ή  $B$  έχει  $n+m$  αποτελέσματα.
  - **Αμοιβαία αποκλειόμενα**: η παρατήρηση αποτελέσματος του  $A$  αποκλείει την παρατήρηση αποτελέσματος του  $B$ , και αντίστροφα.
  - $|A \cup B| = |A| + |B|$ , αν  $|A \cap B| = \emptyset$
  - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού:  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία.
  - Τρόποι να **διαλέξουμε 2 βιβλία σε διαφορετική γλώσσα**:
    - Ελλ. – Αγγλ.:  $5 \times 7 = 35$
    - Ελλ. – Γερμ.:  $5 \times 10 = 50$
    - Αγγλ. – Γερμ.:  $7 \times 10 = 70$
  - Αμοιβαία αποκλειόμενα. Σύνολο: **155** διαφορετικές επιλογές.
  - Τρόποι να **διαλέξουμε 2 βιβλία**:  $\frac{22 \times 21}{2} = 231$

# Παραδείγματα

---

- **#passwords** με 6 – 8 χαρακτήρες αποτελούμενα από κεφαλαία (Αγγλικά) γράμματα και (τουλάχιστον ένα) δεκαδικό ψηφίο.
  - **#passwords** μήκους  $k = 36^k - 26^k$
  - **#passwords** =  $(36^6 + 36^7 + 36^8) - (26^6 + 26^7 + 26^8)$
- **#passwords** μήκους 2 από A, B, C, D και 0, 1, 2 με τουλάχιστον ένα ψηφίο.
  - **Σωστό** το  $7^2 - 4^2 = 33$ . **Λάθος** το (γιατί;)  $2 \times 3 \times 7 = 42!$
- **#δυναμικών συμβ/ρών** μήκους 8 που **είτε** αρχίζουν από 1 **είτε** τελειώνουν σε 00:
  - **Όχι αμοιβαία αποκλειόμενα:**  $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$ .

# Διατάξεις – Μεταθέσεις

---

- **Διατάξεις**  $P(n, k)$ :  $k$  από  $n$  διακεκριμένα αντικείμενα σε  $k$  διακεκριμένες θέσεις (1 αντικείμενο σε κάθε θέση).
  - $P(n, k) = \#$ τρόπων να πληρωθούν  $k$  διακεκριμένες θέσεις από  $n$  διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).
  - $$P(n, k) = n(n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
  - $\#$ τρόπων να πληρώσουμε 4 (διαφορετικές) θέσεις εργασίας αν έχουμε 30 υποψήφιους:  $P(30, 4) = 30!/26!$
  - $\#$ συμβ/ρών μήκους 10 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες:  $P(24, 10) = 24!/14!$
- **Μεταθέσεις**  $n$  αντικειμένων:  $P(n, n) = n!$ 
  - $\#$ αναθέσεων 10 (διαφορετικών) γραφείων σε 10 καθηγητές:  $P(10, 10) = 10!$
  - $\#$ συμβ/ρών μήκους 24 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες:  $P(24, 24) = 24!$

# Παραδείγματα

---

- #συμβ/ρών από 4 διαφορετικούς χαρακτήρες ακολουθούμενους από 3 διαφορετικά ψηφία:
  - $P(24, 4) \times P(10, 3)$
- #τετραψήφιων δεκαδικών αριθμών που δεν αρχίζουν από 0 και δεν έχουν επαναλαμβανόμενα ψηφία:
  - $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ .
- #μεταθέσεων (κεφαλαίων Ελληνικών) όπου Α εμφανίζεται πριν από τα Β και Γ:
  - $P(24, 21) \times 2!$
- #μεταθέσεων όπου Α εμφανίζεται πριν το Β, και μετά από τα Γ και Δ:
  - $P(24, 20) \times 2!$

# Μεταθέσεις με Ομάδες

- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέξης ΕΦΗΒΙΚΟΣ: 8!
- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέξης ΠΑΡΑΠΟΝΑ:
  - Μεταθέσεις με ομάδες ίδιων αντικειμένων:  $8!/(2!3!1!1!1!)$
- Μεταθέσεις  $n$  αντικειμένων σε  $k$  ομάδες ίδιων αντικειμένων με πληθάρια  $n_1, n_2, \dots, n_k$  αντίστοιχα:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ:  $24!/(7!8!5!4!)$ 
  - Αν πρώτο και τελευταίο Α:  $22!/(5!8!5!4!)$
  - Αν δεν πρέπει να εμφανίζεται ΔΔΔΔ:  $24!/(7!8!5!4!) - 21!/(7!8!5!1!)$



# Διατάξεις με Επανάληψη

---

- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών:  $10^5$
- Διατάξεις με επανάληψη:  $n$  διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε απεριόριστα «αντίγραφα») σε  $k$  διακεκριμένες θέσεις:  $n^k$ 
  - Διανομή  $k$  διακεκριμένων αντικειμένων σε  $n$  διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα), όταν η σειρά στις υποδοχές δεν έχει σημασία.
- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών με τουλ. ένα 8:  $10^5 - 9^5$
- Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου  $A$ :  $2^{|A|}$ 
  - $|A|$  στοιχεία σε 2 υποδοχές (ανήκει – δεν ανήκει στο υποσύνολο).
- #δυναμικών συμβ/ρών μήκους  $n$  με άρτιο πλήθος από 1:  $2^{n-1}$ 
  - $\forall$  συμβ/ρά μήκους  $n-1$ ,  $\exists$  μοναδική συμβ/ρά με άρτιο πλήθος 1.
  - Ιδέα του parity bit.

# Διατάξεις με Επανάληψη

---

- #πενταδικών συμβ/ρών μήκους  $n$  με άρτιο πλήθος από 1:
  - #πενταδικών συμβ/ρών χωρίς 0 και 1 (άρτιο πλήθος 1):  $3^n$
  - Από τις υπόλοιπες  $5^n - 3^n$ , οι μισές περιέχουν άρτιο πλήθος 1.
    - Καθεμία περιέχει μια υπακολουθία με 0 και 1.
    - Από προηγούμενο, οι μισές υπακολουθίες έχουν άρτιο πλήθος 1.
  - Τελικά:  $3^n + (5^n - 3^n)/2 = (5^n + 3^n)/2$
- #εβδομαδιαίων προγραμμάτων μελέτης για μαθήματα M, Φ, Χ, Ο ώστε κάθε μάθημα τουλάχιστον 1 ημέρα.
  - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού:  $4^7 - |\overline{M} \cup \overline{\Phi} \cup \overline{X} \cup \overline{O}|$ 
    - #προγραμμάτων χωρίς (τουλ.) 1 μάθημα:  $3^7$  (4 περιπτώσεις).
    - #προγραμμάτων χωρίς (τουλ.) 2 μαθήματα:  $2^7$  (6 περιπτώσεις).
    - #προγραμμάτων χωρίς (τουλ.) 3 μαθήματα:  $1^7 = 1$  (4 περιπτ.)
    - #προγραμμάτων χωρίς (τουλ.) 4 μαθήματα: 0
  - Τελικά:  $4^7 - 4 \times 3^7 + 6 \times 2^7 - 4 = 8400$

# Διατάξεις με Επανάληψη

---

- Διανομή  $k$  διακεκριμένων αντικειμένων σε  $n$  διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό χωρητικότητας) με σειρά στις υποδοχές να έχει σημασία.
  - Ιστιοφόρο έχει  $n$  κατάρτια στα οποία μπορεί να αναρτηθούν  $k$  διαφορετικές σημαίες. Πόσα διαφορετικά σήματα;

$$n(n+1)\cdots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

- Κυκλικές μεταθέσεις  $n$  ατόμων:  $(n-1)!$ 
  - #τρόπων που  $n$  άνθρωποι κάθονται σε κυκλικό τραπέζι (διακρίνουμε μεταξύ δεξιά και αριστερά).

# Συνδυασμοί

- **Συνδυασμοί**  $C(n, k)$ : #επιλογών  $k$  από  $n$  διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = C(n, n-k)$$

- Διαφορετικές **6άδες Lotto** (από 1-49):  $C(49, 6)$
- #υποσυνόλων με  $k$  στοιχεία από σύνολο  $n$  στοιχείων:  $C(n, k)$
- #τρόπων στελέχωσης **5μελούς** κοινοβουλευτικής επιτροπής, όπου μέλη **ισότιμα**:  $C(300, 5)$
- #δυναμικών **συμβ/ρών μήκους 32** με (ακριβώς) **επτά 1**:  $C(32, 7)$
- #επιλογών 3 αριθμών 1-300 ώστε άθροισμα να διαιρείται από 3.
  - Αριθμοί 1-300 σε 3 ομάδες 100 αριθμών με βάση mod 3.
  - Είτε 3 από ίδια ομάδα είτε έναν από κάθε ομάδα.
  - Τελικά  $3C(100, 3) + 100^3 = 1.485.100$

# Συνδυασμοί με Επανάληψη

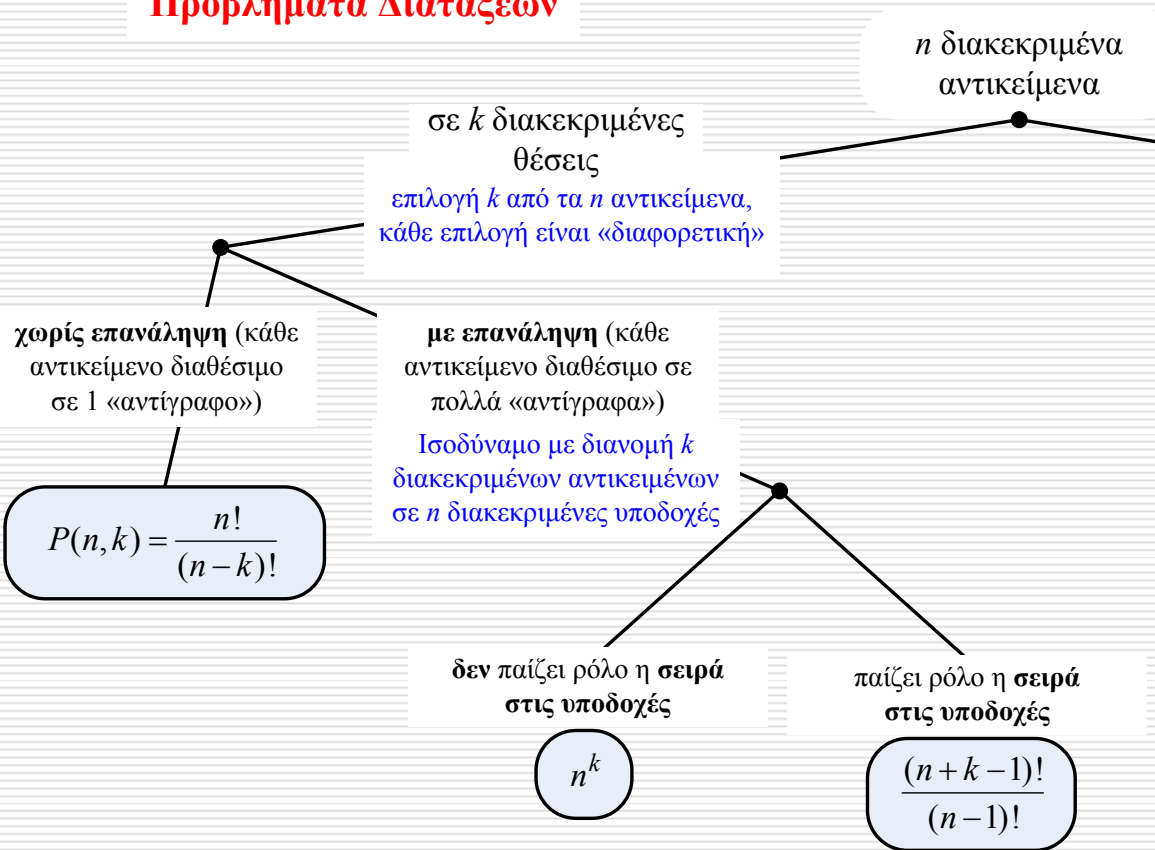
- Διαφορετικά **αποτελέσματα** από ρίψη 2 (ίδιων) ζαριών: **21**
- Συνδυασμοί με **επανάληψη**:  $k$  από  $n$  **διακεκριμένα** αντικείμενα (διαθέσιμα σε **απεριόριστα** «αντίγραφα»)
  - Διανομή  $k$  **ίδιων** αντικειμένων σε  $n$  **διακεκριμένες** υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα).

$$C(n + k - 1, k) = \frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!} = \binom{n + k - 1}{k}$$

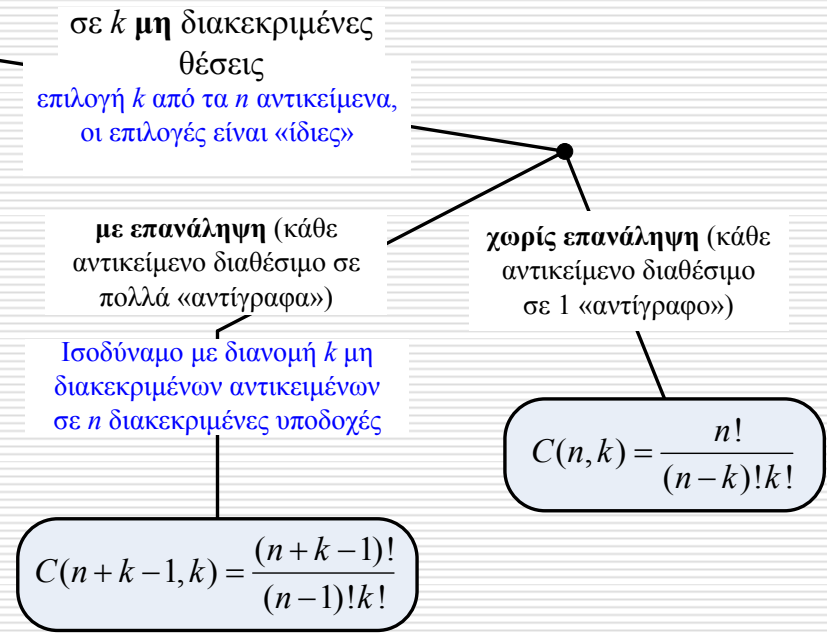
- Διανομές αντιστοιχούν σε **μεταθέσεις**  $k - 1$  και  $n - 1$  **0**.  
#1 ανάμεσα σε 0 καθορίζει #αντικειμένων σε κάθε υποδοχή.
- #διανομών  $k$  ίδιων αντικειμένων σε  $n$  διακεκριμένες υποδοχές ώστε **καμία υποδοχή κενή** ( $k \geq n$ ).
  - $C(n + (k - n) - 1, k - n) = C(k - 1, k - n) = C(k - 1, n - 1)$

# Ανακεφαλαίωση

## Προβλήματα Διατάξεων



## Προβλήματα Συνδυασμών



**Μεταθέσεις** ( $n = k$ ):  $P(n, n) = n!$

**Μεταθέσεις**  $n$  αντικειμένων όταν έχουμε  $k$  ομάδες ίδιων αντικ. με πληθάρια  $n_1, \dots, n_k$ :

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

# Παραδείγματα

---

- #ακεραίων λύσεων της εξίσωσης  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ 
  - Αν  $x_i \geq 0$ :  $C(20 + 4 - 1, 20) = C(23, 20) = C(23, 3)$
  - Αν  $x_i \geq 1$ :  $C(16 + 4 - 1, 16) = C(19, 16) = C(19, 3)$
  - Αν  $x_1 \geq 2, x_2 \geq 4, x_3 \geq 1, x_4 \geq 5$ :  $C(8 + 4 - 1, 8) = C(11, 3)$
  
- 5 διαφορετικά γράμματα (π.χ. Α, Β, Γ, Δ, Ε) και 20 κενά  $\_$ .  
#συμβ/ρών που αρχίζουν και τελειώνουν με γράμμα και έχουν ανάμεσα σε διαδοχικά γράμματα τουλάχιστον 3 κενά.
  - Μεταθέσεις 5 γραμμάτων:  $5!$
  - 12 κενά στις 4 διακεκριμένες «υποδοχές» ανάμεσα σε γράμματα.
  - Υπόλοιπα 8 κενά στις 4 «υποδοχές» με  $C(4 + 8 - 1, 8)$  τρόπους.
  - Τελικά:  $C(11, 8) 5!$  συμβ/ρές.

# Παραδείγματα

---

- $n$  θρανία στη σειρά για  $k$  φοιτητές που εξετάζονται ( $n \geq 2k-1$ ).  
#τοποθετήσεων ώστε τουλάχιστον **μία κενή θέση** ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών.
  - Μεταθέσεις  $k$  φοιτητών:  $k!$  (καταλαμβάνουν  $k$  θρανία).
  - Τοποθετούμε  $k-1$  θρανία ανάμεσά τους.
  - Υπόλοιπα  $n-2k+1$  (ίδια) θρανία στις  $k+1$  διακεκριμένες «υποδοχές» στην αρχή, στο τέλος, και ανάμεσα σε φοιτητές.
    - $C((k+1) + (n-2k+1) - 1, n-2k+1) = C(n-k+1, n-2k+1)$   
 $= C(n-k+1, k)$
  - Τελικά  $C(n-k+1, k) k! = (n-k+1)!/(n-2k+1)!$
  - Διαφορετικά **μεταθέσεις** (με ομάδες)  $k$  διαφορετικών αντικειμένων (φοιτητών) και  $n-2k+1$  **ίδιων** αντικειμένων (ελεύθερων θρανίων).



# Παραδείγματα

---

- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 A, 8 B, 5 Γ, και 4 Δ όπου **δεν** εμφανίζεται το ΓΑ.
  - #συμβ/ρών μήκους 19 από 7 A, 8 B, και 4 Δ:  $19!/(7!8!4!)$
  - Δημιουργούνται 20 διακεκριμένες «υποδοχές» για τα 5 Γ.
  - Εξαιρούνται οι 7 πριν από κάθε A.
  - Διανομή 5 Γ σε 13 διακεκριμένες «υποδοχές»:  $C(13, 5)$ .
  - Τελικά:  $[19!/(7!8!4!)] \times [13!/(5!8!)]$ .
- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 A, 8 B, 5 Γ, και 4 Δ όπου το **πρώτο B** εμφανίζεται **πριν** το πρώτο A.
  - #επιλογών θέσεων για 4 Δ (από 24):  $C(24, 4)$ .
  - #επιλογών θέσεων για 5 Γ (από 20):  $C(20, 5)$ .
  - Ένα B σε **πρώτη διαθέσιμη** θέση.
  - #επιλογών θέσεων για υπόλοιπα 7 B (από 14):  $C(14, 7)$ .
  - Συνολικά:  $[24!/(4!5!15!)] \times [14!/(7!7!)]$ .

# Παραδείγματα

---

- Έστω το «τετράγωνο» που ορίζεται από τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(0, 8)$ ,  $(10, 0)$ , και  $(10, 8)$ .
- Πόσα διαφορετικά «μονοπάτια» από το  $(0, 0)$  στο  $(10, 8)$ , αν σε κάθε βήμα μετακινούμαστε είτε κατά μια μονάδα προς τα πάνω είτε κατά μια μονάδα προς τα δεξιά.
  - Πρέπει να κάνουμε 8 βήματα Πάνω και 10 βήματα Δεξιά.
  - #μονοπατιών = #μεταθέσεων 8 Π και 10 Δ =  $18!/(10! 8!)$
- Ακολουθίες  $a_1, \dots, a_n$  και  $\beta_1, \dots, \beta_m$ . #τρόπων καταγραφής στοιχείων των 2 ακολουθιών ώστε να διατηρείται η σειρά μεταξύ των στοιχείων της ίδιας ακολουθίας;
  - Μεταθέσεις  $n$  A και  $m$  B δείχνουν θέσεις στοιχείων κάθε ακολουθίας.
  - Δεδομένη η σειρά των στοιχείων κάθε ακολουθίας.
  - Τελικά:  $(n+m)!/(n! m!)$ .