

(Τυπικές) Γλώσσες: Ορισμοί

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Αλφάβητα και Συμβολοσειρές

- **Αλφάβητο:** πεπερασμένο μη-κενό σύνολο Σ .
 - $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{a, b, \gamma, \dots, \omega\}$
- **Συμβολοσειρά:** πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων του Σ .
 - Μήκος συμβολοσειράς: #συμβόλων.
 - Κενή συμβολοσειρά ϵ ή ε : (μοναδική) συμβ/ρά μήκους 0.
- Σ^k : σύνολο συμβολοσειρών Σ μήκους k .
 - $\{0, 1\}^2 = \{00, 01, 10, 11\}$
- Σ^* : σύνολο όλων των συμβολοσειρών Σ .
 - $\{0, 1\}^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$.
- Το Σ^* είναι αριθμησιμο.
 - Για $k = 0, 1, 2, \dots$, λεξικογραφική διάταξη του Σ^k .

$$\Sigma^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma^k$$

Πράξεις με Συμβολοσειρές

- Παράθεση x και y : $x \circ y$ ή xy .
 - Π.χ. παράθεση των $αβγδ$ και $εζηθ$ είναι $αβγδεζηθ$.
- Επανάληψη (ή παράθεση) του w για k φορές: $w^k = \overbrace{w \circ \dots \circ w}^{k \text{ φορές}}$
 - Π.χ. $(αβ)^3 = αβαβαβ$, $(010)^4 = 010010010010$
- Αντίστροφη w^R συμβολοσειράς w : συμβολοσειρά που προκύπτει διαβάζοντας w από «τέλος» προς «αρχή» (αντίστροφα).
 - $(αβγδ)^R = δγβα$, $(10010)^R = 01001$, $(αβγδγβα)^R = αβγδγβα$.
 - Παλινδρομική (καρκινική) συμβολοσειρά w αν $w = w^R$.
 - Νδο (επαγωγικά) $\forall x, y \in \Sigma^*$, $(x \circ y)^R = y^R \circ x^R$
- x υποσυμβολοσειρά w αν $\exists y, z \in \Sigma^*$: $w = yxz$.
 - x πρόθεμα w αν $y = \epsilon$. x κατάληξη w αν $z = \epsilon$.

(Τυπικές) Γλώσσες

- (Τυπική) **γλώσσα** L : οποιοδήποτε **υποσύνολο** Σ^* .
 - **Αριθμήσιμο σύνολο** συμβολοσειρών.
- Παραδείγματα γλωσσών στο $\Sigma = \{0, 1, 2\}$:
 - $L_1 = \{012, 021, 120, 102, 210, 201\}$
 - $L_2 = \{\varepsilon, 1, 11, 111, 1111, \dots\}$
 - $L_3 = \{w \in \Sigma^* : \text{το τελευταίο ψηφίο του } w \text{ είναι } 0\}$
 - $L_4 = \{\} = \emptyset$
 - $L_5 = \{\varepsilon\}$
- Σύνολο όλων των γλωσσών 2^{Σ^*} **μη αριθμήσιμο** (διαγωνιοποίηση).

Πράξεις με Γλώσσες

- Πράξεις συνόλων:
 - Ένωση, τομή, διαφορά, συμπλήρωμα.
- Παράθεση γλωσσών L_1 και L_2 : $L_1 \circ L_2$ ή $L_1 L_2$
 $L_1 \circ L_2 = \{w \in \Sigma^* : w = x_1 \circ x_2 \text{ για κάποια } x_1 \in L_1 \text{ και } x_2 \in L_2\}$
 - $L_1 = \{0, 00, 11\}$ και $L_2 = \{\epsilon, 1\}$, τότε
 $L_1 L_2 = \{0, 00, 11, 01, 001, 111\}$
- $L^2 = L \circ L$: παράθεση L με τον εαυτό της.
- $L^k = \overbrace{L \circ \dots \circ L}^{k \text{ φορές}}$: παράθεση L με τον εαυτό της k φορές.

Πράξεις με Γλώσσες

- **Kleene star** L^* γλώσσας L : αποτελείται από παράθεση οποιουδήποτε (πεπερασμένου) αριθμού συμβολοσειρών της L .
$$L^* = \{w \in \Sigma^* : w = x_1 \circ \dots \circ x_k \text{ για } k \geq 0, x_1, \dots, x_k \in L\}$$
$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k$$
 - Αν $L = \{1, 00\}$, τότε
 $L^* = \{\epsilon, 1, 00, 11, 100, 001, 0000, 1100, 10000, 1001, 00100, \dots\}$
 - Αν $L = \{\epsilon\}$, τότε $L^* = \{\epsilon\}$.
 - Αν $L = \emptyset$, τότε $L^* = \{\epsilon\}$ (για κάθε $L, \epsilon \in L^*$).
- L^+ : αποτελείται από παράθεση **θετικού** αριθμού συμβ/ρών της L .
$$L^+ = \{w \in \Sigma^* : w = x_1 \circ \dots \circ x_k \text{ για } k \geq 1, x_1, \dots, x_k \in L\}$$
$$= \bigcup_{k \geq 1} L^k$$
 - Πότε οι L^* και L^+ είναι διαφορετικές; Ποια είναι η διαφορά τους;