

Σχέσεις Ισοδυναμίας

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

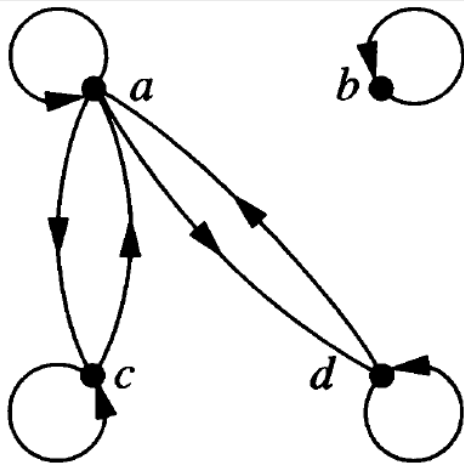
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

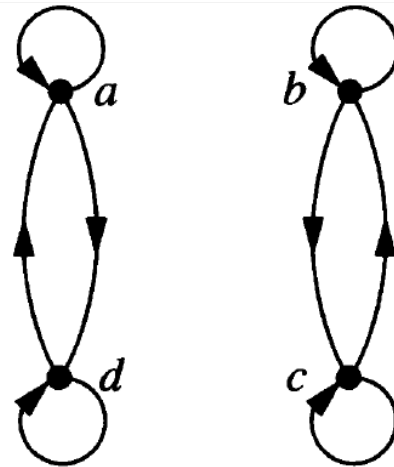


Σχέση Ισοδυναμίας

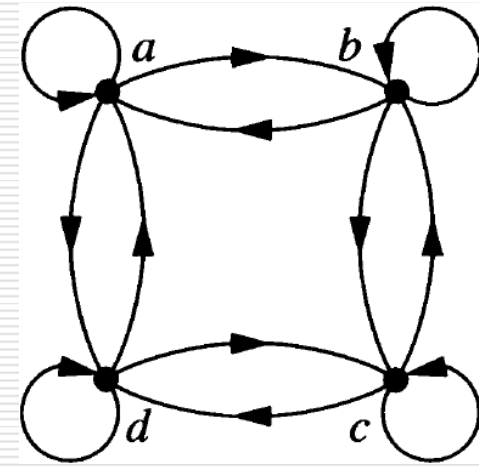
- Σχέση **Ισοδυναμίας**: ανακλαστική, συμμετρική, και μεταβατική.
 - Άνθρωποι: ίδιο επώνυμο, κατοικούν ίδια πολυκατοικία, ...
 - Πραγματικοί αριθμοί: $|a| = |b|$, $a - b$ είναι ακέραιος, ...
 - Φυσικοί αριθμοί: $a \equiv b \pmod{n}$
- Ποιες από τις παρακάτω είναι σχέσεις ισοδυναμίας;



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Κλάση Ισοδυναμίας

- Θεωρούμε σχέση ισοδυναμίας $R \subseteq A \times A$.
- **Κλάση ισοδυναμίας** στοιχείου a (συμβ. $[a]_R$ ή απλά $[a]$):
 - $[a]_R = \{\beta \in A : (a, \beta) \in R\}$ (στοιχεία που σχετίζονται με a).
 - **Αντιπρόσωπος** κλάσης $[a]_R$: οποιοδήποτε **στοιχείο** $\beta \in [a]_R$.
 - Ανακλαστική: $a \in [a]_R$.
 - Συμμετρική: Αν $\beta \in [a]_R$, τότε και $a \in [\beta]_R$.
 - Μεταβατική: Αν $\beta, \gamma \in [a]_R$, τότε $(\beta, \gamma) \in R$.

Διαμέριση ως Σχέση Ισοδυναμίας

- Διαμέριση A : συλλογή μη κενών υποσυνόλων $\{A_1, \dots, A_k\}$:
 - Ανά δύο ξένα μεταξύ τους ($A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$).
 - Ένωσή τους είναι το A ($A_1 \cup \dots \cup A_k = A$).
 - A_1, \dots, A_k καλούνται σύμπλοκα της διαμέρισης.
- Αντιστοιχία μεταξύ διαμερίσεων συνόλου A και σχέσεων ισοδυναμίας στο A .
- Διαμέριση $\{A_1, \dots, A_k\}$. Σχέση $R = \{(a, \beta): a, \beta \in A_i\}$ αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.
 - Ανακλαστική και συμμετρική (προφανές από ορισμό R).
 - Μεταβατική: Αν $a, \beta \in A_i$ και $\beta, \gamma \in A_i$, τότε και $a, \gamma \in A_i$.

Σχέση Ισοδυναμίας ως Διαμέριση

- Κλάσεις σχέσης ισοδυναμίας R αποτελούν διαμέριση A .
- Για κάθε $a, \beta \in A$, είτε $[a] = [\beta]$ είτε $[a] \cap [\beta] = \emptyset$,
(και βέβαια $[a], [\beta]$ μη κενά).
 - Απαγωγή σε άτοπο: έστω $[a] \neq [\beta]$ και $[a] \cap [\beta] \neq \emptyset$.
 - Χβτγ., υποθέτουμε ότι $[\beta] - [a] \neq \emptyset$.
 - Στοιχείο $\gamma \in [\beta]$, αλλά $\gamma \notin [a]$.
 - Θεωρούμε στοιχείο $\delta \in [a] \cap [\beta]$.
 - $(\delta, \beta) \in R$, αφού $(\beta, \delta) \in R$ και συμμετρική, και $(\beta, \gamma) \in R$.
 - Μεταβατική: $(\delta, \gamma) \in R$.
 - $(a, \delta) \in R$ και $(\delta, \gamma) \in R$.
 - Μεταβατική $(a, \gamma) \in R$. Δηλαδή $\gamma \in [a]$, άτοπο!
- Διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας: μη κενές, ξένες ανά δυο, και ως ένωση έχουν A (κάθε στοιχείο ανήκει σε κλάση).

Εκλέπτυνση Ισοδυναμίας

- R_1 και R_2 σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο A ,
 π_1 και π_2 αντίστοιχες διαμερίσεις του A .
- π_1 εκλέπτυνση της π_2 ($\pi_1 \leq \pi_2$) αν $R_1 \subseteq R_2$.
 - Στοιχεία στο ίδιο σύμπλοκο π_1 ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο π_2 .
 - Π.χ. κατοικούν στο ίδιο διαμέρισμα, στην ίδια πολυκατοικία, στο ίδιο οικοδομικό τετράγωνο, στην ίδια πόλη.
- Γινόμενο $\pi_1 \cdot \pi_2$: διαμέριση της σχέσης ισοδυναμίας $R_1 \cap R_2$.
 - Στοιχεία στο ίδιο σύμπλοκο π_1 και π_2 , στο ίδιο σύμπλοκο $\pi_1 \cdot \pi_2$
 - Γινόμενο $\pi_1 \cdot \pi_2$ αποτελεί εκλέπτυνση των π_1 και π_2 .
- Άθροισμα $\pi_1 + \pi_2$: διαμέριση της σχέσης ισοδυναμίας $(R_1 \cup R_2)^*$.
 - Στοιχεία στο ίδιο σύμπλοκο π_1 ή π_2 , στο ίδιο σύμπλοκο $\pi_1 + \pi_2$
 - π_1 και π_2 αποτελούν εκλεπτύνσεις του αθροίσματος $\pi_1 + \pi_2$.