



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών
Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης
5η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων

Άσκηση 1 (Κατηγορηματική Λογική). (α) Έστω $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$, και έστω $\mathcal{P}(S_n)$ το δυναμοσύνολο του S_n . Για κάθε φυσικό m , $0 \leq m \leq n$, συμβολίζουμε με E_m το υποσύνολο του $\mathcal{P}(S_n)$ που αποτελείται από τα υποσύνολα του S_n με πληθικό αριθμό m . Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q , την οποία ερμηνεύουμε στο $\mathcal{P}(S_n)$ με το $Q(x, y)$ να αληθεύει αν $x \subseteq y$ (δεν υπάρχει στη γλώσσα μας άλλο κατηγορηματικό σύμβολο, συναρτησιακό σύμβολο, ή σύμβολο σταθεράς). Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

1. Τύπο $\varphi_1(x)$ που αληθεύει αν $x \notin E_0$.
2. Τύπο $\varphi_2(x)$ που αληθεύει αν $x \in E_{n-1}$.
3. Τύπο $\varphi_3(x)$ που αληθεύει αν το x έχει τουλάχιστον 2 γνήσια υποσύνολα στο $\mathcal{P}(S_n)$.
4. Τύπο $\varphi_4(x)$ που αληθεύει αν το x έχει (ακριβώς) 2 υποσύνολα στο $\mathcal{P}(S_n)$.
5. Τύπο $\varphi_5(x, y)$ που αληθεύει αν τα x και y αποτελούν μια διαμέριση του S_n .
6. Τύπο $\varphi_6(x, y, z)$ που αληθεύει αν το σύνολο x αποτελεί την ένωση των συνόλων y και z .
7. Πρόταση που δηλώνει την ύπαρξη μοναδικού συνόλου που είναι υπερσύνολο όλων των συνόλων στο $\mathcal{P}(S_n)$.

Άσκηση 2 (Κατηγορηματική Λογική). (α) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ :

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \forall x(Q(x) \vee P(x)) \rightarrow (\exists xQ(x) \vee \forall xP(x)) \\ \psi &\equiv (\exists xQ(x) \vee \forall xP(x)) \rightarrow \forall x(Q(x) \vee P(x)),\end{aligned}$$

όπου $Q(x)$ και $P(x)$ μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα. Να εξετάσετε τις προτάσεις φ και ψ ως προς την λογική τους εγκυρότητα. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τους ισχυρισμούς σας.

(β) Έστω $\psi(x)$ τύπος με μία ελεύθερη μεταβλητή x , και φ πρόταση. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη:

$$(\exists x\psi(x) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi)$$

Άσκηση 3 (Κατηγορηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall xP(x, x) \wedge \forall x\forall y\forall z(P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)) \wedge \forall x\forall y(P(x, y) \vee P(y, x))] \rightarrow \exists y\forall xP(y, x)$$

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάρημο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ .
2. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ .