Στοιχεία Κατηγορηματικής Λογικής

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 15780 Αθήνα
Email: fotakis@cs.ntua.gr

1 Εισαγωγή

Η προτασιακή λογική επιτρέπει τη διατύπωση και μελέτη επιχειρημάτων που αφορούν πεπερασμένο αριθμό "λογικών" αντικειμένων, δηλαδή αντικειμένων που μπορούν να χαρακτηρισθούν αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ). Όμως πολύ συχνά χρειάζεται να διατυπώσουμε και να μελετήσουμε προτάσεις όπως "υπάρχει ένας φυσικός αριθμός με την ιδιότητα ..." ή "κάθε μη-κενό σύνολο έχει την ιδιότητα ..." που αναφέρονται σε άπειρο αριθμό αντικειμένων με τιμές διαφορετικές[1] (και συνήθως πολύ περισσότερες) από Α και Ψ.

Για παράδειγμα, στη γλώσσα της προτασιακής λογικής μπορούμε να εκφράσουμε την πρόταση "κάθε αριθμός του συνόλου S είναι είτε άρτιος είτε περιττός" μόνο αν το S είναι πεπερασμένο σύνολο. Αυτή η πρόταση θα μπορούσε να γραφεί ως $\bigwedge_{i\in S}(p_i \vee q_i)$, όπου το p_i αντιστοιχεί στην μαθηματική πρόταση "ο αριθμός i είναι άρτιος" και το q_i αντιστοιχεί στην μαθηματική πρόταση "ο αριθμός i είναι περιττός". Όμως για να εκφράσουμε την πρόταση "κάθε φυσικός αριθμός είναι είτε άρτιος είτε περιττός" πρέπει να καταφύγουμε σε προτασιακούς τύπους με άπειρο μέγεθος.

Η *κατηγορηματική λογική* (predicate logic ή first order logic) παρέχει ένα αρκετά γενικό πλαίσιο διατύπωσης και μελέτης επιχειρημάτων. Σε διαισθητικό επίπεδο, η κατηγορηματική λογική μπορεί να θεωρηθεί σαν επέκταση της προτασιακής λογικής σε "μη-λογικά" αντικείμενα (π.χ. αριθμούς, σύνολα, γραφήματα).

Όπως και στην προτασιακή λογική, οι τύποι της κατηγορηματικής λογικής είναι "λογικά" αντικείμενα, είναι δηλαδή είτε αληθείς είτε ψευδείς. Όμως οι μεταβλητές τους είναι "μη-λογικά" αντικείμενα και σε αυτές μπορούμε να εφαρμόσουμε τους ποσοδείκτες $\forall$ και $\exists$, συναρτήσεις, και κατηγορήματα. Έτσι μπορούμε να διατυπώσουμε και να μελετήσουμε ως προς την εγκυρότητα προτάσεις όπως "κάθε φυσικός αριθμός είναι άρτιος ή περιττός", $\forall x(\mathrm{even}(x) \vee \mathrm{odd}(x))$, "ο επόμενος κάθε άρτιου φυσικού αριθμού είναι περιττός", $\forall x(\mathrm{even}(x) \rightarrow \mathrm{odd}(\mathrm{suc}(x)))$, "το άθροισμα δύο άρτιων είναι άρτιος", $\forall x \forall y((\mathrm{even}(x) \wedge \mathrm{even}(y)) \rightarrow \mathrm{even}(x+y))$, "κάθε μη-κενό σύνολο έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο", $\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow |x| \geq 1)$, κοκ.

Μια άλλη σημαντική δυνατότητα της κατηγορηματικής λογικής είναι η (τυπική) έκφραση του συλλογισμού της *εξειδίκευσης*: Αν γνωρίζουμε ότι "κάθε μη-κενό σύνολο έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο" , $\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow |x| \geq 1)$, και ότι "το S είναι ένα μη-κενό σύνολο" , $S \neq \emptyset$, συμπεραίνουμε ότι "το S έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο" , $|S| \geq 1$.

[1] Κάνοντας κατάχρηση των όρων σε κάποιες περιπτώσεις, θα αναφερόμαστε σε αντικείμενα που παίρνουν μόνο τιμές αλήθειας Α και Ψ με τον όρο *λογικά αντικείμενα* και σε αντικείμενα που παίρνουν διαφορετικές / περισσότερες τιμές με τον όρο *μη-λογικά αντικείμενα*.

2 Συντακτικό Πρωτοβάθμιας Γλώσσας

Η πρωτοβάθμια γλώσσα αποτελείται από:

1. Τα *λογικά σύμβολα* που είναι:
   (a) Οι λογικοί σύνδεσμοι $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ που ερμηνεύονται όπως και στην προτασιακή λογική.
   (b) Οι ποσοδείκτες $\forall$ και $\exists$. Ο ποσοδείκτης $\forall$ μπορεί να θεωρηθεί ως γενικευμένη σύζευξη (με άπειρους ενδεχομένως όρους) και ο ποσοδείκτης $\exists$ ως γενικευμένη διάζευξη (με άπειρους ενδεχομένως όρους). Π.χ. $\forall n Q(n) \equiv \bigwedge_n Q(n)$ και $\exists n Q(n) \equiv \bigvee_n Q(n)$.
   (c) Η ισότητα $\approx$, η οποία μπορεί να θεωρηθεί επίσης (και ουσιαστικά λειτουργεί) σαν κατηγορηματικό σύμβολο.
   (d) Τα σημεία στίξης (π.χ. παρενθέσεις, κόμμα).

   Τα λογικά σύμβολα έχουν την ίδια ερμηνεία / ίδιο ρόλο σε όλες πρωτοβάθμιες γλώσσες.
2. Τα *μη-λογικά σύμβολα* που είναι:
   (a) Οι μεταβλητές, που συμβολίζονται συνήθως με $x, y, z, \ldots$.
   (b) Τα κατηγορηματικά σύμβολα / κατηγορήματα, που συμβολίζονται συνήθως με $P, Q, R, \ldots$. Τα κατηγορηματικά σύμβολα περιγράφουν *σχέσεις* ή *ιδιότητες* των στοιχείων του "σύμπαντος" / πεδίου ορισμού και έχουν "*λογικό*" αποτέλεσμα. Ένα κατηγορηματικό σύμβολο με n ορίσματα ονομάζεται n-μελές[2].
   (c) Τα συναρτησιακά σύμβολα / συναρτήσεις, που συμβολίζονται συνήθως με $f, g, h, \ldots$. Τα συναρτησιακά σύμβολα περιγράφουν *πράξεις* μεταξύ των στοιχείων του "σύμπαντος" / πεδίου ορισμού και έχουν "*μη-λογικό*" αποτέλεσμα. Ένα συναρτησιακό σύμβολο με m ορίσματα ονομάζεται m-θέσιο.
   (d) Οι σταθερές, που συμβολίζονται συνήθως με $c, d, e, \ldots$. Ουσιαστικά πρόκειται για 0-θέσια συναρτησιακά σύμβολα που δεν έχουν ορίσματα και επιστρέφουν πάντα την ίδια τιμή.

   Η ερμηνεία / ο ρόλος των μη-λογικών συμβόλων καθορίζεται από τη συγκεκριμένη ερμηνεία της πρωτοβάθμιας γλώσσας.

2.1 Δομή Προτασιακού Τύπου στην Πρωτοβάθμια Γλώσσα

Ένας *όρος* είναι είτε μια μεταβλητή, είτε μία σταθερά, είτε το αποτέλεσμα μιας συνάρτησης που εφαρμόζεται σε ήδη κατασκευασμένους όρους. Οι όροι είναι "μη-λογικά" αντικείμενα, και δεν μπορούν να συνδέονται με λογικούς συνδέσμους.

Οι όροι συνδέονται / σχετίζονται μεταξύ τους είτε με κατηγορηματικά σύμβολα είτε με την ισότητα. Το αποτέλεσμα είναι οι *ατομικοί τύποι*. Τυπικά, ένας ατομικός τύπος αποτελείται είτε από δύο όρους που ελέγχονται για ισότητα είτε από n όρους ελέγχονται για συσχέτιση μέσω ενός n-μελούς κατηγορήματος. Οι ατομικοί τύποι είναι "λογικά" αντικείμενα και ουσιαστικά παίζουν το ίδιο ρόλο με τις προτασιακές μεταβλητές.

Οι *τύποι* της πρωτοβάθμιας γλώσσας κατασκευάζονται επαγωγικά από τους ατομικούς τύπους είτε εφαρμόζοντας κάποιον ποσοδείκτη σε ήδη υπάρχοντα τύπο είτε συνδυάζοντας ήδη υπάρχοντες τύπους με λογικούς συνδέσμους (όπως στην προτασιακή λογική). Τα βασικά λογικά δομικά

[2] Τα 0-μελή κατηγορηματικά σύμβολα αντιστοιχούν στις προτασιακές μεταβλητές.

στοιχεία των τύπων είναι οι ατομικοί τύποι. Οι τύποι της κατηγορηματικής λογικής είναι "λογικά" αντικείμενα.

Οι όροι και οι τύποι ορίζονται επαγωγικά και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε μαθηματική επαγωγή για να αποδείξουμε τις ιδιότητές τους. Ισχύει η μοναδική αναγνωσιμότητα των όρων και των τύπων. Κάθε όρος και κάθε τύπος αναλύεται στο δενδρο-διάγραμμά του.

Ένας μνημονικός κανόνας για να δούμε αν μια έκφραση της πρωτοβάθμιας γλώσσας είναι όρος ή τύπος είναι να δούμε τι αποτέλεσμα μπορεί να έχει / τιμή μπορεί να πάρει. Αν το αποτέλεσμα είναι "λογικό" (δηλαδή Α ή Ψ), τότε πρόκειται για τύπο (αν δεν έχει καθόλου ποσοδείκτες και λογικούς συνδέσμους, είναι μάλιστα ατομικός τύπος). Αν το αποτέλεσμα είναι "μη-λογικό", τότε πρόκειται για όρο.

Για παράδειγμα, το $f_1(f_2(x,y), f_1(x,y,z), x)$, όπου το f_1 είναι 3-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο και το f_2 είναι 2-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο, είναι όρος. Το $f_1(f_2(x,y), f_1(x,y,z), x) \approx y$ είναι ατομικός τύπος. Το $\exists y(f_1(f_2(x,y), f_1(x,y,z), x) \approx y)$ είναι τύπος αλλά όχι ατομικός. Το

$$[\exists y(f_1(f_2(x,y), f_1(x,y,z), x) \approx y)] \wedge [\forall z(f_1(f_2(x,y), f_1(x,y,z), x) \approx x)]$$

είναι επίσης τύπος.

2.2 Ελεύθερες και Δεσμευμένες Εμφανίσεις Μεταβλητών

Μια μεταβλητή εμφανίζεται *δεσμευμένη* σε κάποιον τύπο όταν εμπίπτει στο "πεδίο εφαρμογής" κάποιου ποσοδείκτη και *ελεύθερη* διαφορετικά. Για παράδειγμα, έστω ο τύπος $\forall x Q(x) \to P(x)$. Η πρώτη εμφάνιση της μεταβλητής x είναι δεσμευμένη και η δεύτερη ελεύθερη. Ουσιαστικά πρόκειται για δύο διαφορετικές μεταβλητές. Μετονομάζοντας την πρώτη, γράφουμε τον τύπο ισοδύναμα σαν $\forall y Q(y) \to P(x)$.

Κάθε μεταβλητή που εμφανίζεται ελεύθερη πρέπει να αποτιμηθεί για να αποφανθούμε σχετικά με την τιμή αλήθειας του τύπου. Αντίθετα, οι δεσμευμένες εμφανίσεις των μεταβλητών δεν χρειάζονται αποτίμηση, αφού ο ποσοδείκτης που "δεσμεύει" την εμφάνιση της μεταβλητής καθορίζει την αποτίμησή της.

Ένας τύπος ονομάζεται *πρόταση* όταν όλες οι εμφανίσεις μεταβλητών είναι δεσμευμένες (δηλαδή δεν έχει καθόλου ελεύθερες μεταβλητές). Η τιμή αλήθειας μιας πρότασης δεν εξαρτάται από την αποτίμηση των μεταβλητών της (αφού δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές) αλλά μόνο από το πλαίσιο ερμηνείας της πρότασης.

3 Ερμηνεία και Αποτίμηση

Κάθε τύπος της κατηγορηματικής λογικής (π.χ. $\forall x(A(x) \to B(x))$, $\forall x(A(x) \to B(f(x)))$, $\forall x(g(x, c_1) \approx f(x))$) επιδέχεται πολλών ερμηνειών ανάλογα με το πεδίο ορισμού των μεταβλητών, τη σημασία / λειτουργία των κατηγορηματικών και των συναρτησιακών συμβόλων, καθώς και τις τιμές των σταθερών. Με άλλα λόγια, κάθε τύπος αποκτά διαφορετικό νόημα ανάλογα με την ερμηνεία των μη-λογικών συμβόλων.

Για να εξετάσουμε αν ένας τύπος της πρωτοβάθμιας γλώσσας είναι αληθής ή ψευδής πρέπει κατ' αρχήν να ορίσουμε μια δομή (ή ερμηνεία) η οποία καθορίζει το πλαίσιο στο οποίο ερμηνεύεται ο τύπος και τη λειτουργία των κατηγορηματικών και συναρτησιακών συμβόλων. Τυπικά, η ερμηνεία καθορίζει το "σύμπαν" / πεδίο ορισμού των μεταβλητών, τη σχέση που αντιστοιχεί σε κάθε κατηγορηματικό σύμβολο, τη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε συναρτησιακό σύμβολο, και τις τιμές των σταθερών.

Ως παράδειγμα, αναφέρουμε την γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ της Θεωρίας Αριθμών. Η $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ ορίζεται στο σύμπαν των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, περιλαμβάνει την σταθερά $\mathbf{0}$, που αποτιμάται στο 0, το μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο $'$, που ερμηνεύεται ως η συνάρτηση που δίνει τον επόμενο κάθε φυσικού αριθμού, δηλ. $x' = x + 1$, τα διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $\oplus$ και $\otimes$, που ερμηνεύονται με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντίστοιχα, δηλ. $x \oplus y = x + y$ και $x \otimes y = x \cdot y$, και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $<$, που ερμηνεύεται με την σχέση "μικρότερο", δηλ. το $x < y$ αληθεύει ανν ο φυσικός x είναι μικρότερος του φυσικού y. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ της Θεωρίας Συνόλων. Η $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ ορίζεται σε σύμπαν που περιέχει σύνολα ως στοιχεία (π.χ. θα μπορούσε να είναι το δυναμοσύνολο ενός δεδομένου συνόλου), και περιλαμβάνει την σταθερά $\emptyset$, που αποτιμάται στο κενό σύνολο, και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $\subseteq$, που ερμηνεύεται με την σχέση "υποσύνολο", δηλ. το $x \subseteq y$ αληθεύει ανν το σύνολο x είναι υποσύνολο του συνόλου y.

Μια ενδιαφέρουσα εξάσκηση στην εκφραστικότητα της πρωτοβάθμιας γλώσσας αφορά στην "κωδικοποίηση" απλών προτάσεων της Ελληνικής γλώσσας, αφού πρώτα ορίσουμε την κατάλληλη ερμηνεία (ή θεωρήσουμε μια δεδομένη ερμηνεία).

Παραδείγματα. Η φράση "όλα τα ζώα μπορούν να μιλήσουν" γράφεται στην πρωτοβάθμια γλώσσα σαν $\forall x(Z(x) \to M(x))$ όπου το $Z(x), M(x)$ είναι μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα που δηλώνουν αντίστοιχα ότι το x είναι ζώο και ότι το x μπορεί να μιλήσει. Η φράση "δεν μπορούν όλα τα ζώα να μιλήσουν" γράφεται σαν $\neg[\forall x(Z(x) \to M(x))] \equiv \exists x(Z(x) \wedge \neg M(x))$.

Η φράση "ο Γιώργος και ο Κώστας έχουν την ίδια γιαγιά από τη μητέρα τους" γράφεται σαν

$$\forall x \forall y \forall u \forall w[((M(x,\Gamma) \wedge M(y,x)) \wedge (M(u,\mathrm{K}) \wedge M(w,u))) \to w \approx y)]$$

όπου $M(x,y)$ διμελές κατηγορηματικό σύμβολο που δηλώνει ότι η x είναι μητέρα του y, Γ είναι η σταθερά "Γιώργος" και K είναι η σταθερά "Κώστας". Αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $m(x)$ που επιστρέφει τη μητέρα του x, η ίδια φράση μπορεί να αποδοθεί απλούστερα: $m(m(\Gamma)) \approx m(m(\mathrm{K}))$.

Η φράση "όλα τα παιδιά του πατέρα μου είναι αδέρφια μου" γράφεται σαν

$$\forall x \forall y((\Pi(x,\mathrm{M}) \wedge \Pi(x,y)) \to A(y,\mathrm{M}))$$

όπου τα διμελή κατηγορήματα $\Pi(x,y)$ και $A(x,y)$ δηλώνουν ότι ο x είναι πατέρας και αδερφός του y αντίστοιχα, και το M είναι σταθερά που δηλώνει τον ομιλούντα. Με χρήση της συνάρτησης $f(x)$ που επιστρέφει τον πατέρα του x, η ίδια φράση γράφεται απλούστερα $\forall x(f(\mathrm{M}) \approx f(x) \to A(x,\mathrm{M}))$.

Έστω κατηγορηματικά σύμβολα $A(x)$, που δηλώνει ότι το x είναι αυτοκίνητο, $G(x)$, που δηλώνει ότι το x είναι πράσινο, και $F(x)$, που δηλώνει ότι το x είναι γρήγορο. Η φράση "υπάρχουν πράσινα αυτοκίνητα" γράφεται σαν $\exists x(A(x) \wedge G(x))$. Η φράση "τα πράσινα αυτοκίνητα είναι γρήγορα" γράφεται σαν $\forall x((A(x) \wedge G(x)) \to F(x))$. Επίσης ο τύπος $\forall x((A(x) \wedge F(x)) \to G(x))$ δηλώνει ότι "τα γρήγορα αυτοκίνητα είναι πράσινα" (με βάση τη συγκεκριμένη ερμηνεία των κατηγορηματικών συμβόλων).

Άσκηση 1. Να αποδώσετε τις παρακάτω φράσεις στη γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών:

1. "Ο x είναι άρτιος αριθμός".
2. "Ο x διαιρεί ακριβώς τον y".
3. "Ο x είναι πρώτος αριθμός".
4. "Κάθε αριθμός έχει πρώτο διαιρέτη".
5. "Κάθε πρώτος αριθμός είναι είτε περιττός είτε ίσος με 2".
6. "Αν δύο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους και διαιρούν κάποιον αριθμό, τότε και το γινόμενό τους διαιρεί αυτόν το αριθμό".

Λύση. Η πρώτη φράση: $\mathrm{even}(x) \equiv \exists y(x \approx 2 \otimes y)$, όπου $2 \equiv (0')'$.
Η δεύτερη φράση: $D(x,y) \equiv \exists z(y \approx x \otimes z)$.
Για την τρίτη φράση, θυμίζουμε ότι ένας αριθμός είναι πρώτος αν είναι διαφορετικός από το 0 και το 1 και δεν έχει άλλους διαιρέτες εκτός από τον εαυτό του και τη μονάδα. Επομένως, $\mathrm{prime}(x) \equiv \neg(x \approx 0) \wedge \neg(x \approx 0') \wedge \forall y \forall z(x \approx y \otimes z \rightarrow (x \approx y \vee x \approx z))$.
Η τέταρτη φράση: $\forall x \exists y(D(y,x) \wedge \mathrm{prime}(y))$.
Η πέμπτη φράση: $\forall x(\mathrm{prime}(x) \rightarrow (\mathrm{odd}(x) \vee x \approx 2))$, όπου $\mathrm{odd}(x) \equiv \exists y(x \approx (2 \otimes y) \oplus 0')$, και $2 \equiv (0')'$.
Για την έκτη φράση, θυμίζουμε ότι δύο αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους αν μοναδικός κοινός διαιρέτης τους είναι το 1. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κατηγόρημα $D(x,y)$ που εκφράζει ότι ο x διαιρεί ακριβώς τον y και να εκφράσουμε ότι οι x και y είναι πρώτοι μεταξύ τους: $R(x,y) \equiv \forall z((D(z,x) \wedge D(z,y)) \rightarrow z \approx 0')$. Η έκτη φράση εκφράζεται ως: $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge D(x,z) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x \otimes y, z))$. $\square$

Άσκηση 2. Να αποδώσετε τις φράσεις "κάθε φοιτητής έχει περάσει τουλάχιστον ένα μάθημα" και "υπάρχει φοιτητής που δεν έχει περάσει κανένα μάθημα" στην πρωτοβάθμια γλώσσα, αφού ορίσετε την κατάλληλη δομή.

Λύση. Θεωρούμε ένα σύμπαν με τους φοιτητές και τα μαθήματα. Ορίζουμε κατηγορήματα $S(x)$: ο x φοιτητής, $C(x)$: το x μάθημα, $P(x,y)$: ο x έχει περάσει y. Έχουμε $\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge P(x,y)))$ και $\neg[\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge P(x,y)))] \equiv \exists x(S(x) \wedge \forall y(C(y) \rightarrow \neg P(x,y)))$. $\square$

Άσκηση 3. Να αποδώσετε τις φράσεις "κανένας μουσικός που παίζει έγχορδο δεν παίζει πνευστό" και "υπάρχει κάποιος μουσικός που παίζει είτε πιάνο είτε κάποιο πνευστό όργανο που δεν είναι το σαξόφωνο" στην πρωτοβάθμια γλώσσα, αφού ορίσετε την κατάλληλη δομή.

Λύση. Για την πρώτη φράση, ορίζουμε τα κατηγορήματα $M(x)$: ο x μουσικός, $\Pi(x)$: το x πνευστό όργανο, $E(x)$: το x έγχορδο όργανο, και $\text{Παίζει}(x,y)$: ο x παίζει y. Έχουμε

$$\forall x[(M(x) \wedge \exists y(E(y) \wedge \text{Παίζει}(x,y))) \rightarrow \neg \exists z(\Pi(z) \wedge \text{Παίζει}(x,z))]$$

Για τη δεύτερη φράση, ορίζουμε επίσης τις σταθερές Σ για το σαξόφωνο και P για το πιάνο.

$$\exists x \exists y[M(x) \wedge \text{Παίζει}(x,y) \wedge (y \approx \mathrm{P} \vee (\Pi(y) \wedge y \not\approx \Sigma))]$$

$\square$

Άσκηση 4. Να αποδώσετε στη γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών τη φράση "για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει ένας άλλος (έστω m) που είναι ο μοναδικός μέγιστος μεταξύ εκείνων που το διπλάσιό τους δεν ξεπερνά τον αρχικό".

Λύση. Χρειαζόμαστε το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $x \leq y$ που αληθεύει αν και μόνο αν ο x είναι μικρότερος ή ίσος του y. Επειδή η γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών όπως ορίζεται στο βιβλίο δεν έχει αυτό το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο, το ορίζουμε ως εξής:

$$x \leq y \equiv \exists z(y \approx x \oplus z)$$

Επίσης για ευκολία, ορίζουμε τη σταθερά $2 \equiv (0')'$. Ο ζητούμενος τύπος είναι

$$\forall n \exists m[(2 \otimes m \leq n) \wedge \forall k((2 \otimes k \leq n) \to (k \leq m))]$$

□

Άσκηση 5. Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Θεωρούμε ως σύμπαν τις πόλεις μιας χώρας, και ερμηνεύουμε το P με την σχέση που αποτελείται από όλα τα ζευγάρια πόλεων (x, y) για τα οποία υπάρχει απευθείας οδική σύνδεση από την x στην y. Οι απευθείας συνδέσεις είναι μονής κατεύθυνσης (δηλ. η απευθείας σύνδεση της x με την y δεν συνεπάγεται αναγκαία την απευθείας σύνδεση της y με την x), και μια πόλη μπορεί να συνδέεται απευθείας με τον εαυτό της (π.χ. "περιμετρική" οδός). Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

1. Τύπο $\varphi_1(x)$ που αληθεύει ανν η πόλη x είναι απομονωμένη, δηλ. δεν έχει καμία σύνδεση, εισερχόμενη από ή εξερχόμενη προς, άλλη πόλη.
2. Τύπο $\varphi_2(x)$ που αληθεύει ανν η πόλη x έχει τουλάχιστον 2 εισερχόμενες συνδέσεις από άλλες πόλεις.
3. Τύπο $\varphi_3(x)$ που αληθεύει ανν η πόλη x έχει (ακριβώς) 1 εξερχόμενη σύνδεση προς άλλη πόλη.
4. Πρόταση που δηλώνει ότι το μέγιστο πλήθος εξερχόμενων συνδέσεων από κάποια πόλη προς άλλες πόλεις είναι 2.
5. Πρόταση που δηλώνει ότι αν κάθε ζευγάρι διαφορετικών πόλεων συνδέεται με απευθείας οδική σύνδεση σε τουλάχιστον μία από τις δύο κατευθύνσεις, τότε υπάρχει πόλη στην οποία μπορούμε να φθάσουμε από κάθε άλλη πόλη είτε απευθείας είτε μέσω (ακριβώς) μίας ενδιάμεσης πόλης.

Λύση.

1. $\varphi_1(x) \equiv \forall y(x \neq y \to \neg P(x, y) \wedge \neg P(y, x))$
2. $\varphi_2(x) \equiv \exists y \exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge P(y, x) \wedge P(z, x))$
3. Έστω $Q(x, y) \equiv x \neq y \wedge P(x, y)$. Έχουμε: $\varphi_3(x) \equiv \exists y(Q(x, y) \wedge \forall z(Q(x, z) \to y = z))$
4. Η πρότασή μας πρέπει να δηλώνει ότι κάθε πόλη έχει το πολύ 2 εξερχόμενες συνδέσεις προς άλλες πόλεις και ότι υπάρχει πόλη με (ακριβώς) 2 εξερχόμενες συνδέσεις προς άλλες πόλεις. Ορίζουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}\text{AtMost2}(x) \equiv \neg\exists y \exists z \exists w(&x \neq y \wedge x \neq z \wedge z \neq w \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge \\ &\wedge P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge P(x, w))\text{ , και}\end{aligned}$$

$$\text{Equal2}(x) \equiv \text{AtMost2}(x) \wedge \exists y \exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge P(x, y) \wedge P(x, z))$$

   Τελικά, η ζητούμενη πρόταση είναι: $\exists x \text{Equal2}(x) \wedge \forall x \text{AtMost}(x)$
5. $\forall x \forall y(x \neq y \to P(x, y) \vee P(y, x)) \to \exists x \forall y(x \neq y \to P(y, x) \vee \exists z(P(y, z) \wedge P(z, x)))$ □

3.1 Ορισμός Αλήθειας Tarski

Αφού καθορίσουμε τη δομή $\mathcal{A}$ στο πλαίσιο της οποίας θα ερμηνευθεί ένας τύπος φ, πρέπει να καθορίσουμε τις τιμές των ελεύθερων μεταβλητών (αν υπάρχουν) προκειμένου να αποφανθούμε αν ο τύπος είναι αληθής ή ψευδής (για τη συγκεκριμένη δομή και τις συγκεκριμένες τιμές των ελεύθερων μεταβλητών). Μια συνάρτηση v που αποδίδει τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές ενός τύπου ονομάζεται *αποτίμηση*. Γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ αν ο τύπος φ αληθεύει για / ικανοποιείται από την αποτίμηση v στην ερμηνεία $\mathcal{A}$.

Για δεδομένη δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v, η τιμή αλήθειας ενός τύπου της πρωτοβάθμιας λογικής καθορίζεται με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, ο οποίος αντιστοιχεί (και επεκτείνει κατάλληλα) τους πίνακες αλήθειας της προτασιακής λογικής. Ο ορισμός αλήθειας του Tarski ουσιαστικά ορίζει ότι ένας τύπος είναι αληθής στην $\mathcal{A}$ για αποτίμηση v ανν το νόημά του εκφράζει μια αλήθεια στην $\mathcal{A}$.

Ορισμός 1 (**Ορισμός Αλήθειας Tarski**). *Έστω δομή $\mathcal{A}$ για την πρωτοβάθμια γλώσσα, φ τύπος, και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Η έννοια "ο φ αληθεύει για την v στην $\mathcal{A}$", συμβολικά $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, ορίζεται αναδρομικά ως εξής:*

1. *$\mathcal{A} \models (x = y)[v]$ ανν οι μεταβλητές x και y αποτιμώνται στο ίδιο στοιχείο του σύμπαντος (τυπικά, ανν $\overline{v}(x) = \overline{v}(y)$, όπου $\overline{v}$ η επέκταση της v που προκύπτει κατά την εφαρμογή του ορισμού).*
2. *$\mathcal{A} \models Q(x_1, \ldots, x_n)[v]$ ανν η πλειάδα που προκύπτει από την αποτίμηση των μεταβλητών $x_1, \ldots, x_n$ ανήκει στην σχέση με την οποία ερμηνεύουμε το κατηγόρημα Q στην δομή $\mathcal{A}$ (τυπικά, ανν $(\overline{v}(x_1), \ldots, \overline{v}(x_n)) \in Q^{\mathcal{A}}$).*
3. *$\mathcal{A} \models \neg\psi[v]$ ανν δεν ισχύει ότι $\mathcal{A} \models \psi[v]$.*
4. *$\mathcal{A} \models (\psi \wedge \chi)[v]$ ανν ($\mathcal{A} \models \psi[v]$ και $\mathcal{A} \models \chi[v]$).*
5. *$\mathcal{A} \models (\psi \vee \chi)[v]$ ανν ($\mathcal{A} \models \psi[v]$ ή $\mathcal{A} \models \chi[v]$).*
6. *$\mathcal{A} \models (\psi \to \chi)[v]$ ανν (όταν $\mathcal{A} \models \psi[v]$, τότε $\mathcal{A} \models \chi[v]$).*
7. *$\mathcal{A} \models (\psi \leftrightarrow \chi)[v]$ ανν ($\mathcal{A} \models \psi[v]$ ανν $\mathcal{A} \models \chi[v]$).*
8. *$\mathcal{A} \models \forall x\psi[v]$ ανν για κάθε $\alpha \in |A|$, ισχύει ότι $\mathcal{A} \models \psi[v(x|\alpha)]$ (δηλ. ανν για κάθε στοιχείο α του σύμπαντος, ο τύπος ψ αληθεύει στην $\mathcal{A}$ αν η ελεύθερη μεταβλητή x αποτιμηθεί στο α).*
9. *$\mathcal{A} \models \exists x\psi[v]$ ανν υπάρχει $\alpha \in |A|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi[v(x|\alpha)]$ (δηλ. ανν υπάρχει στοιχείο α του σύμπαντος τέτοιο ώστε ο τύπος ψ αληθεύει στην $\mathcal{A}$ αν η ελεύθερη μεταβλητή x αποτιμηθεί στο α).*

Παρατηρούμε ότι τα πρώτα δύο σημεία του ορισμού καθορίζουν πότε αληθεύει ένας ατομικός τύπος, τα σημεία 3 - 7 "εφαρμόζουν" τον πίνακα αλήθειας του αντίστοιχου λογικού συνδέσμου στον αναδρομικό ορισμό των τύπων, και τα σημεία 8 και 9 ουσιαστικά ορίζουν τον ποσοδείκτη $\forall$ ως γενικευμένη σύζευξη πάνω σε όλα τα στοιχεία του σύμπαντος, και τον ποσοδείκτη $\exists$ ως γενικευμένη διάζευξη πάνω σε όλα τα στοιχεία του σύμπαντος.

Ο Ορισμός 1 μπορεί να εφαρμοστεί είτε με top-down τρόπο (το πιο συνηθισμένο και φυσιολογικό) είτε (σπανιότερα) με bottom-up τρόπο. Στην top-down εφαρμογή, η βασική ιδέα είναι να εφαρμόσουμε τον ορισμό βήμα-βήμα μέχρι να καταλήξουμε σε μια πρόταση της ελληνικής - μαθηματικής γλώσσας (αυτής που χρησιμοποιεί ο ορισμός) για την οποία μπορούμε εύκολα να αποφανθούμε *τεκμηριωμένα* και *πειστικά* ότι ο τύπος είναι *αληθής* ή *ψευδής*.

Στην bottom-up εφαρμογή, καθορίζουμε τη δομή $\mathcal{A}$ και μια αποτίμηση v για τις ελεύθερες μεταβλητές του φ, υπολογίζουμε τις (μη-λογικές) τιμές όλων των όρων του φ και εν συνεχεία τις (λογικές) τιμές όλων των ατομικών τύπων. Από τις λογικές τιμές των ατομικών τύπων μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή αλήθειας του τύπου χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογικών συνδέσμων, όπως στην προτασιακή λογική. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε τον ποσοδείκτη $\forall$ σαν γενικευμένη σύζευξη και τον ποσοδείκτη $\exists$ σαν γενικευμένη διάζευξη.

Η τιμή αλήθειας μιας *πρότασης* εξαρτάται μόνο από την δομή με βάση την οποία ερμηνεύεται (επειδή η πρόταση δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές). Επομένως, αφού καθορίσουμε τη δομή, μπορούμε να αποφανθούμε αν μια πρόταση είναι αληθής ή ψευδής (στη συγκεκριμένη δομή) με βάση τον Ορισμό 1. Λέμε ότι μια δομή $\mathcal{A}$ είναι *μοντέλο* μιας πρότασης φ, και γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi$, αν η φ αληθεύει στην $\mathcal{A}$.

Για εξάσκηση, ας δοκιμάσουμε κατ' αρχήν να υπολογίσουμε την τιμή αλήθειας ενός τύπου για δεδομένη ερμηνεία και αποτίμηση (ή μιας πρότασης για δεδομένη ερμηνεία).

Άσκηση 6. Έστω $\mathcal{A}$ η δομή των ακεραίων αριθμών με τη σταθερά 0, τις συναρτήσεις του επόμενου $'$, της πρόσθεσης $\oplus$, του πολλαπλασιασμού $\otimes$ (όπως τις γνωρίζουμε) και το διμελές κατηγόρημα $x \leq y$ που αληθεύει ανν το x είναι μικρότερο ή ίσο του y. Να εξετάσετε αν αληθεύει ο τύπος

$$(x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2) \leq (x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2)$$

για την αποτίμηση $v(x_1) = -1$ και $v(x_2) = 2$. Επίσης να εξετάσετε αν αληθεύει η πρόταση

$$\forall x_1 \forall x_2 [(x_1 \leq 2) \to ((x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2) \leq (x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2))]$$

όπου $2 \equiv 0''$, και η πρόταση

$$\forall x_2 \exists x_1 [(x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2) \leq (x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2)]$$

Λύση. Για τον πρώτο τύπο, υπολογίζουμε τις τιμές των όρων $(x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2)$ και $(x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2)$ για τη συγκεκριμένη αποτίμηση. Οι τιμές είναι -3 και 0 αντίστοιχα. Ο τύπος αληθεύει αφού $-3 \leq 0$.

Για τις δύο προτάσεις, ορίζουμε (χάριν συντομίας) τις συναρτήσεις $f_1(x_1, x_2) = (x_1 \otimes x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2)$ και $f_2(x_1, x_2) = (x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_1) \oplus (x_1 \otimes x_2)$. Στη συνήθη γραφή, είναι $f_1(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2$ και $f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1 x_2$. Παρατηρούμε ότι

$$x_1^3 + x_1 x_2 \leq 2x_1^2 + x_1 x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq 2$$

Δηλαδή, για κάθε τιμή α_2 για το x_2, υπάρχει κάποια τιμή α_1 για το x_1 (π.χ. $\alpha_1 = 2$, μάλιστα στο συγκεκριμένο παράδειγμα αυτή η τιμή είναι ανεξάρτητη της τιμής του x_2) για τις οποίες $(\alpha_1 \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_1) \oplus (\alpha_1 \otimes \alpha_2) \leq (\alpha_1 \otimes \alpha_1) \oplus (\alpha_1 \otimes \alpha_1) \oplus (\alpha_1 \otimes \alpha_2)$.

Άρα και οι δύο προτάσεις αληθεύουν στη δομή των ακεραίων αριθμών όπως την ορίσαμε.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η τελευταία πρόταση είναι αληθής στην δομή $\mathcal{A}$ εφαρμόζοντας τον ορισμό αλήθειας του Tarski με top-down τρόπο (δείτε ότι στις προηγούμενες περιπτώσεις, η εφαρμογή του ορισμού ήταν bottom-up). Έστω v μια αυθαίρετα επιλεγμένη αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x_2 \exists x_1 (f_1(x_1, x_2) \leq f_2(x_1, x_2))[v]$$

ανν για κάθε ακέραιο αριθμό α_2 ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \models \exists x_1(f_1(x_1, \alpha_2) \leq f_2(x_1, \alpha_2))$$

ανν για κάθε ακέραιο αριθμό α_2 υπάρχει ακέραιος αριθμός α_1 ώστε να ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \models f_1(\alpha_1, \alpha_2) \leq f_2(\alpha_1, \alpha_2)$$

Πράγματι για κάθε ακέραιο αριθμό α_2 ισχύει ότι $\alpha_1^3 + \alpha_1\alpha_2 \leq 2\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2$ αν διαλέξουμε σαν α_1 έναν οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό μικρότερο ή ίσο του 2. □

4 Ικανοποιησιμότητα και Λογική Εγκυρότητα

Οι έννοιες της ικανοποιησιμότητας και της εγκυρότητας στην κατηγορηματική λογική ορίζονται παρόμοια με τις αντίστοιχες έννοιες στην προτασιακή λογική. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην κατηγορηματική λογική εμπλέκεται και η έννοια της δομής / ερμηνείας εκτός από την έννοια της αποτίμησης.

Θα λέμε ότι μια αποτίμηση v σε μια δεδομένη δομή $\mathcal{A}$ *ικανοποιεί* έναν τύπο φ ανν ο φ αληθεύει για τη v στην $\mathcal{A}$. Συμβολικά γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi[v]$. Η v ικανοποιεί ένα σύνολο τύπων T στην $\mathcal{A}$ ανν ικανοποιεί όλα τα στοιχεία του T. Ένα σύνολο τύπων T είναι *ικανοποιήσιμο* αν υπάρχει δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ που ικανοποιούν το T.

Αν το φ είναι πρόταση (ή το T είναι ένα σύνολο προτάσεων), η ικανοποιησιμότητα του φ (του T αντίστοιχα) εξαρτάται μόνο από τη δομή $\mathcal{A}$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi$.

Ένας τύπος φ είναι (λογικά) *έγκυρος* ή *λογικά αληθής* αν ικανοποιείται από κάθε δομή $\mathcal{A}$ και κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$. Μια πρόταση φ είναι λογικά έγκυρη αν ικανοποιείται από κάθε δομή $\mathcal{A}$. Οι έγκυροι τύποι αντιστοιχούν στις ταυτολογίες της προτασιακής λογικής, αφού εκφράζουν προτάσεις που είναι αληθείς ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη δομή και αποτίμηση.

Αν αντικαταστήσουμε τα μέρη μιας ταυτολογίας (στη γλώσσα της προτασιακής λογικής) με τύπους της πρωτοβάθμιας γλωσσας, το αποτέλεσμα είναι ένας λογικά έγκυρος τύπος. Για παράδειγμα, ο τύπος

$$\forall x \exists y(Q(x,y) \wedge P(x,y,z)) \rightarrow [\forall x \forall y \forall z P(x,y,z) \rightarrow \forall x \exists y(Q(x,y) \wedge P(x,y,z))]$$

είναι λογικά έγκυρος επειδή προκύπτει από την ταυτολογία $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ αντικαθιστώντας όπου φ το $\forall x \exists y(Q(x,y) \wedge P(x,y,z))$ και όπου ψ το $\forall x \forall y \forall z P(x,y,z)$.

Ένα σύνολο τύπων T *συνεπάγεται λογικά* έναν τύπο φ αν κάθε δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και το φ. Συμβολικά γράφουμε $T \models \varphi$. Η έννοια της λογικής συνεπαγωγής είναι αντίστοιχη με την έννοια της ταυτολογικής συνεπαγωγής. Χρησιμοποιώντας αυτό το συμβολισμό, γράφουμε $\emptyset \models \varphi$ για να δηλώσουμε ότι ο φ είναι λογικά έγκυρος. Όπως και στην προτασιακή λογική, ισχύει ότι $T \models \varphi$ ανν $T \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Υπάρχουν δύο βασικές μορφές ασκήσεων σχετικές με αυτές τις έννοιες: (α) να αποδείξουμε ότι ένας τύπος είναι λογικά έγκυρος και (β) να διατυπώσουμε μια δομή που ικανοποιεί ή δεν ικανοποιεί έναν δεδομένο τύπο / πρόταση. Η πρώτη κατηγορία ασκήσεων λύνεται είτε παρατηρώντας ότι ο τύπος προκύπτει από μια ταυτολογία της προτασιακής λογικής με κατάλληλη αντικατάσταση είτε εφαρμόζοντας τον ορισμό αλήθειας του Tarski για αυθαίρετα επιλεγμένη ερμηνεία και αποτίμηση. Για τη δεύτερη κατηγορία ασκήσεων, προσπαθούμε να αντιληφθούμε το ουσιαστικό νόημα / βασική ιδιότητα που εκφράζει ο τύπος (π.χ. αποδίδοντάς τον στα ελληνικά για κάποιες συνηθισμένες δομές). Ο τύπος αληθεύει για τις δομές που ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα και δεν αληθεύει για τις υπόλοιπες.

Άσκηση 7. Να αποδείξετε ότι ο τύπος $(\forall x \neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \exists x\varphi)$ είναι λογικά έγκυρος.

Λύση. Ο τύπος προκύπτει από την ταυτολογία $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$ αντικαθιστώντας όπου a το $\forall x \neg\varphi$ και όπου b το $\neg\psi$, και χρησιμοποιώντας ότι $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$ (νόμος άρνησης ποσοδεικτών) και το νόμο της διπλής άρνησης. □

Άσκηση 8. Να αποδείξετε ότι ο τύπος $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \exists y(x \approx y \wedge \varphi(y)))$ είναι λογικά έγκυρος.

Λύση. Έστω αυθαίρετα επιλεγμένη δομή $\mathcal{A}$ και αυθαίρετα επιλεγμένη αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό αλήθειας του Tarski έχουμε:

$$(\mathcal{A} \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \exists y(x \approx y \wedge \varphi(y)))[v]) \text{ ανν}$$

$$(\text{για κάθε } \alpha \in |\mathcal{A}| \text{ ισχύει } \mathcal{A} \models (\varphi(\alpha) \leftrightarrow \exists y(\alpha \approx y \wedge \varphi(y)))) \text{ ανν}$$

$$\forall \alpha \in |\mathcal{A}|, [\mathcal{A} \models \varphi(\alpha) \text{ ανν } (\exists \beta \in |\mathcal{A}| \colon \mathcal{A} \models (\alpha \approx \beta) \text{ και } \mathcal{A} \models \varphi(\beta))] \text{ ανν}$$

Αν $\mathcal{A} \models \varphi(\alpha)$, τότε θέτουμε $\beta = \alpha$ και έχουμε $\mathcal{A} \models \alpha \approx \beta$ και $\mathcal{A} \models \varphi(\beta)$. Αν $\mathcal{A} \not\models \varphi(\alpha)$, τότε δεν υπάρχει β για το οποίο να ισχύει ταυτόχρονα $\mathcal{A} \models \alpha \approx \beta$ και $\mathcal{A} \models \varphi(\beta)$. Επομένως, ο τύπος είναι λογικά έγκυρος. □

Άσκηση 9. Να αποδείξετε ότι ο τύπος $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$ είναι λογικά έγκυρος.

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε δομή $\mathcal{A}$, κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ που ικανοποιεί την $\exists x(P(x) \to Q(x))$ ικανοποιεί και την $(\forall x P(x) \to \exists x Q(x))$. Με άλλα λόγια, όταν αληθεύει η (1), αληθεύει και η (2).

$$\mathcal{A} \models \exists x(P(x) \to Q(x)) \tag{1}$$

$$\mathcal{A} \models (\forall x P(x) \to \exists x Q(x)) \tag{2}$$

Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (1) αληθεύει ανν υπάρχει $\alpha \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models P(\alpha) \to Q(\alpha)$. Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (2) αληθεύει ανν όταν $\mathcal{A} \models \forall x P(x)$, τότε $\mathcal{A} \models \exists x Q(x)$.

Έστω λοιπόν ότι υπάρχει $\alpha \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models P(\alpha) \to Q(\alpha)$ και ότι $\mathcal{A} \models \forall x P(x)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathcal{A} \models \exists x Q(x)$. Επειδή $\mathcal{A} \models \forall x P(x)$, ισχύει ότι $\mathcal{A} \models P(\alpha)$. Άρα αφού $\mathcal{A} \models P(\alpha) \to Q(\alpha)$, ισχύει ότι $\mathcal{A} \models Q(\alpha)$. Δηλαδή για τη συγκεκριμένη τιμή $\alpha \in |\mathcal{A}|, \mathcal{A} \models Q(\alpha)]$. Επομένως ισχύει $\mathcal{A} \models \exists x Q(x)$. □

Για τον δεύτερο τύπο ασκήσεων, πρέπει να επισημάνουμε ότι η ερμηνεία καθορίζει αν ένας τύπος είναι αληθής ή όχι. Για παράδειγμα, η πρόταση $\forall x \exists y(y < x)$ αληθεύει στους ακέραιους αριθμούς, αλλά δεν αληθεύει στους φυσικούς αριθμούς γιατί το 0 είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός.

Άσκηση 10. Να βρείτε μια δομή που ικανοποιεί και μια δομή που δεν ικανοποιεί την πρόταση $\forall x \forall y \forall z((P(x,y) \wedge Q(y,z)) \rightarrow Q(x,z))$.

Λύση. Η δεδομένη πρόταση θυμίζει αρκετά την μεταβατική ιδιότητα. Πράγματι, η πρόταση ικανοποιείται αν θεωρήσουμε μια αριθμητική δομή (π.χ. φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί αριθμοί) όπου το κατηγόρημα $P(x,y)$ εκφράζει ότι το x είναι μικρότερο ή ίσο του y και το κατηγόρημα $Q(x,y)$ εκφράζει ότι το x είναι μικρότερο του y. Η πρόταση γράφεται σαν $\forall x \forall y \forall z((x \leq y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ και αληθεύει για όλες τις αριθμητικές δομές.

Η πρόταση δεν ικανοποιείται αν το κατηγόρημα $P(x,y)$ αληθεύει ανν το x είναι μικρότερο ή ίσο του y και το κατηγόρημα $Q(x,y)$ αληθεύει ανν το x είναι μεγαλύτερο ή ίσο του y. Η πρόταση γράφεται σαν $\forall x \forall y \forall z((x \leq y \wedge y \geq z) \rightarrow x \geq z)$, και δεν αληθεύει σε καμία αριθμητική δομή (π.χ. $2 \leq 4 \wedge 4 \geq 3$ αλλά $2 \ngeq 3$). □

Άσκηση 11. Να βρείτε μια δομή που ικανοποιεί και μια δομή που δεν ικανοποιεί την πρόταση $\forall x \forall y(P(x,y) \vee P(y,x))$.

Λύση. Η πρόταση αληθεύει σε οποιαδήποτε αριθμητική δομή (π.χ. φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί αριθμοί) όπου το κατηγόρημα $P(x,y)$ εκφράζει ότι το x είναι μικρότερο ή ίσο του y. Η πρόταση απαιτεί για κάθε δύο αριθμούς x, y είτε $x \leq y$ είτε $y \leq x$.

Η πρόταση δεν ικανοποιείται όταν το κατηγόρημα $P(x,y)$ εκφράζει ότι $x < y$. Τότε δεν ισχύει π.χ. ότι $2 < 2 \vee 2 < 2$. Επίσης η πρόταση δεν ικανοποιείται στη δομή των ανθρώπων όταν το κατηγόρημα $P(x,y)$ εκφράζει ότι ο x είναι πρόγονος του y. Ο λόγος είναι ότι υπάρχουν άνθρωποι που δεν σχετίζονται με σχέση προγόνου - απογόνου. □

Άσκηση 12. Να γράψετε μία πρόταση της πρωτοβάθμιας γλώσσας που ικανοποιείται αν και μόνο αν η δομή που χρησιμοποιείται για την ερμηνεία της έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Λύση. Δύο τέτοιες προτάσεις είναι $\exists x \exists y(x \not\approx y)$ και $\forall x \exists y(x \not\approx y)$. □

Άσκηση 13. Να δείξετε ότι δεν είναι λογικά έγκυρος ο τύπος $\forall x \exists y Q(x,y) \rightarrow \exists y \forall x Q(x,y)$ περιγράφοντας μία ερμηνεία της γλώσσας της Θεωρίας Αριθμών που να μην τον ικανοποιεί.

Λύση. Ερμηνεύουμε το κατηγόρημα $Q(x,y)$ σαν $x < y$. Η υπόθεση εκφράζει το γεγονός ότι για κάθε φυσικό αριθμό x υπάρχει φυσικός αριθμός y μεγαλύτερός του. Αυτό είναι αλήθεια (π.χ. μπορούμε να θέσουμε $y = x + 1$). Αντίθετα δεν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός y που να είναι μεγαλύτερος από όλους άλλους. Συνεπώς ο τύπος $\forall x \exists y Q(x,y) \rightarrow \exists y \forall x Q(x,y)$ δεν είναι λογικά έγκυρος αφού δεν ισχύει για τη συγκεκριμένη ερμηνεία. □

Άσκηση 14. Έστω πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P και ένα σύμβολο σταθεράς c. Να περιγράψετε μια ερμηνεία που να ικανοποιεί και τις δύο προτάσεις $\exists x \exists y(P(x,c) \wedge P(c,y))$ και $\forall x(P(x,c) \rightarrow \exists y(P(x,y) \wedge P(y,c)))$.

Λύση. Μια δομή που ικανοποιεί και τις δύο προτάσεις είναι οι ρητοί αριθμοί, με το $P(x,y)$ να ερμηνεύεται σαν $x < y$ και η σταθερά c να είναι οποιοσδήποτε ρητός αριθμός (π.χ. $c = 0$). □

5 Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

Κάθε τύπος της πρωτοβάθμιας γλώσσας μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ όπου το $Q_i\in\{\forall,\exists\}$ δηλώνει ποσοδείκτη, το x_i δηλώνει μεταβλητή, και το $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ είναι τύπος της πρωτοβάθμιας γλώσσας όπου δεν εμφανίζονται ποσοδείκτες (ανοικτός τύπος). Αυτή η μορφή ονομάζεται *κανονική ποσοδεικτική μορφή*. Αποδεικνύεται ότι για κάθε τύπο της πρωτοβάθμιας γλώσσας, υπάρχει λογικά ισοδύναμος τύπος σε κανονική ποσοδεικτική μορφή.

Αρκετές φορές χρειάζεται να υπολογίσουμε την κανονική ποσοδεικτική μορφή ενός τύπου. Σε τέτοιες περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε τους νόμους άρνησης ποσοδεικτών, τους νόμους κατανομής ποσοδεικτών, και τους νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών.

Οι νόμοι άρνησης ποσοδεικτών ορίζουν ότι $\neg\forall x\varphi\equiv\exists x\neg\varphi$ και ότι $\neg\exists x\varphi\equiv\forall x\neg\varphi$ (με απλά λόγια, η άρνηση του ποσοδείκτη "για κάθε" είναι ο ποσοδείκτης "υπάρχει", και η άρνηση του ποσοδείκτη "υπάρχει" είναι ο ποσοδείκτης "για κάθε"). Αν θεωρήσουμε τον ποσοδείκτη "για κάθε" ως γενικευμένη σύζευξη και τον ποσοδείκτη "υπάρχει" ως γενικευμένη διάζευξη, οι νόμοι άρνησης ποσοδεικτών μπορούν να θεωρηθούν ως γενικευμένη μορφή των νόμων de Morgan.

Οι νόμοι κατανομής ποσοδεικτών ορίζουν ότι ο ποσοδείκτης "για κάθε" κατανάμεται στην σύζευξη (ως γενικευμένη σύζευξη) και ότι ο ποσοδείκτης "υπάρχει" κατανέμεται στην διάζευξη (ως γενικευμένη διάζευξη). Τυπικά, $\forall x(\varphi(x)\wedge\psi(x))\equiv\forall x\varphi(x)\wedge\forall x\psi(x)$, και $\exists x(\varphi(x)\vee\psi(x))\equiv\exists x\varphi(x)\vee\exists x\psi(x)$.

Οι νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών, ορίζουν τι συμβαίνει όταν ένας ποσοδείκτης μετακινείται (από την υπόθεση ή το συμπέρασμα μιας συνεπαγωγής) εκτός της συνεπαγωγής. Έτσι αν η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο φ, τότε:

$$\begin{array}{ll}\forall x\psi(x)\to\varphi\equiv\exists x(\psi(x)\to\varphi) & \exists x\psi(x)\to\varphi\equiv\forall x(\psi(x)\to\varphi)\\ \varphi\to\forall x\psi(x)\equiv\forall x(\varphi\to\psi(x)) & \varphi\to\exists x\psi(x)\equiv\exists x(\varphi\to\psi(x))\end{array}$$

Ως μνημονικός κανόνας για τους νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών, ο ποσοδείκτης αλλάζει από $\forall$ σε $\exists$ και αντίστροφα όταν αρχικά εφαρμόζεται στην υπόθεση (π.χ. $\forall x\psi(x)\to\varphi\equiv\exists x(\psi(x)\to\varphi)$). Αντίθετα ο ποσοδείκτης παραμένει αμετάβλητος όταν αρχικά εφαρμόζεται στο συμπέρασμα (π.χ. $\varphi\to\forall x\psi(x)\equiv\forall x(\varphi\to\psi(x))$).

Για να εφαρμόσουμε τους νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών, η ποσοδεδειγμένη μεταβλητή δεν πρέπει να εμφανίζεται ελεύθερη[3] στον υποτύπο στον οποίο αρχικά δεν εφαρμόζεται ο ποσοδείκτης (αυτός είναι ο υποτύπος φ στην διατύπωση των νόμων). Ενόσω δεν ισχύει κάτι τέτοιο, μετονομάζουμε τις δεσμευμένες μεταβλητές χρησιμοποιώντας σύμβολα που δεν εμφανίζονται στον τύπο μέχρι εκείνη τη στιγμή. Όταν ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία, μπορούμε απρόσκοπτα να εφαρμόσουμε τους νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών.

[3] Έστω ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε τον αντίστοιχο νόμο μετακίνησης ποσοδεικτών στο $P(x)\to\forall xQ(x)$. Η εμφάνιση της x στο $P(x)$ είναι ελεύθερη και στο $Q(x)$ δεσμευμένη. Αν εφαρμόσουμε το νόμο απευθείας, θα πάρουμε $\forall x(P(x)\to Q(x))$ όπου δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές. Ο πρώτος τύπος είχε μία ελεύθερη μεταβλητή, ενώ ο δεύτερος είναι πρόταση. Είναι φανερό ότι οι δύο τύποι δεν είναι κατ' ανάγκη ισοδύναμοι. Η ισοδύναμη μορφή προκύπτει αντικαθιστώντας το $\forall xQ(x)$ με $\forall yQ(y)$ και μετακινώντας τον ποσοδείκτη. Το αποτέλεσμα είναι $\forall y(P(x)\to Q(y))$. Παρατηρείστε ότι η x εξακολουθεί να παραμένει ελεύθερη σε αυτό τον τύπο.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την κανονική ποσοδεικτική μορφή του $\forall y(S(x,y) \wedge (P(x) \to \forall x Q(x)))$ μετονομάζουμε τη δεσμευμένη εμφάνιση της x στο $Q(x)$ σε z. Το αποτέλεσμα είναι $\forall y(S(x,y) \wedge (P(x) \to \forall z Q(z)))$. Η κανονική ποσοδεικτική μορφή είναι:

$$\forall y \forall z (S(x,y) \wedge (P(x) \to Q(z)))$$

Έστω ο τύπος $(\forall x Q(x) \to \forall x P(x)) \to \forall x Q(x)$. Οι τρεις διαφορετικές δεσμευμένες εμφανίσεις της μεταβλητής x αντιστοιχούν ουσιαστικά σε τρεις διαφορετικές δεσμευμένες μεταβλητές επειδή κάθε εμφάνιση δεσμεύεται από διαφορετικό ποσοδείκτη. Για να βρούμε την κανομική ποσοδεικτική μορφή, μετασχηματίζουμε τον τύπο σε $(\forall x Q(x) \to \forall y P(y)) \to \forall z Q(z)$ μετονομάζοντας τις δύο τελευταίες δεσμευμένες εμφανίσεις της μεταβλητής x σε y και z αντίστοιχα. Η κανονική ποσοδεικτική μορφή προκύπτει εύκολα και είναι:

$$\forall z \exists y \forall x ((Q(x) \to P(y)) \to Q(z))$$

Μερικά ακόμη παραδείγματα:

$$\forall x P(x) \to \exists x Q(x) \equiv \forall x P(x) \to \exists z Q(z) \equiv \exists x \exists z (P(x) \to Q(z))$$

$$\begin{aligned}
\forall x[(Q(x) \wedge \forall y P(x,y)) \to \exists z L(x,z)] &\equiv \forall x[\forall y(Q(x) \wedge P(x,y)) \to \exists z L(x,z)] \\
&\equiv \forall x \exists y[(Q(x) \wedge P(x,y)) \to \exists z L(x,z)] \\
&\equiv \forall x \exists y \exists z[(Q(x) \wedge P(x,y)) \to L(x,z)]
\end{aligned}$$

$$\forall x[Q(x) \to \forall y(x \approx y \wedge Q(y))] \equiv \forall x \forall y[Q(x) \to (x \approx y \wedge Q(y))]$$

$$\begin{aligned}
\forall x(P(x) \to S(x,y)) \to (\exists y P(y) \to \exists z S(y,z)) &\equiv \forall x(P(x) \to S(x,y)) \to (\exists \omega P(\omega) \to \exists z S(y,z)) \\
&\equiv \forall x(P(x) \to S(x,y)) \to \forall \omega \exists z(P(\omega) \to S(y,z)) \\
&\equiv \exists x \forall \omega \exists z[(P(x) \to S(x,y)) \to (P(\omega) \to S(y,z))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x P(x) \to \forall y(S(x,y) \to \neg(\forall z Q(y,z)) &\equiv \forall x P(x) \to \forall y(S(\omega,y) \to \exists z \neg Q(y,z)) \\
&\equiv \forall x P(x) \to \forall y \exists z(S(\omega,y) \to \neg Q(y,z)) \\
&\equiv \exists x \forall y \exists z[P(x) \to (S(\omega,y) \to \neg Q(y,z))]
\end{aligned}$$

Άσκηση 15. Να δείξετε ότι η κανονική ποσοδεικτική μορφή ενός τύπου δεν είναι μοναδική. Υπόδειξη: Εξετάστε τον τύπο $\forall x P(x) \to \forall y Q(y)$.

Λύση. Ο τύπος $\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(y)$ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί σε κανονική ποσοδεικτική μορφή με δύο τρόπους: $\forall y \exists x (P(x) \rightarrow Q(y))$ και $\exists x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y))$. Άρα η κανονική ποσοδεικτική μορφή ενός τύπου δεν είναι μοναδική. □

Άσκηση 16 (Τρίτος Νόμος Μετακίνησης Ποσοδεικτών). Να αποδείξετε ότι ο τύπος $(\forall x \psi(x) \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \exists x (\psi(x) \rightarrow \varphi)$, όπου η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, είναι λογικά έγκυρος.

Λύση. Για αυθαίρετα επιλεγμένη δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ πρέπει να δείξουμε ότι οι (3) και (4) είναι ισοδύναμες όταν η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ:

$$\mathcal{A} \models (\forall x \psi(x) \rightarrow \varphi)[v] \tag{3}$$

$$\mathcal{A} \models \exists x (\psi(x) \rightarrow \varphi)[v] \tag{4}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι η (3) συνεπάγεται λογικά την (4). Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (3) αληθεύει ανν

$$\text{αν } \mathcal{A} \models \forall x \psi(x)[v], \text{ τότε } \mathcal{A} \models \varphi[v]$$

Έστω $\mathcal{A} \models \forall x \psi(x)[v]$, δηλαδή για κάθε $\alpha \in |\mathcal{A}|$, το $\psi(\alpha)$ αληθεύει στην $\mathcal{A}$. Τότε αληθεύει και το $\varphi[v]$ ανεξάρτητα από την αποτίμηση της μεταβλητής x, αφού η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ. Επομένως, ισχύει η (4) γιατί η συνεπαγωγή έχει αληθές συμπέρασμα. Αν $\mathcal{A} \not\models \forall x \psi(x)[v]$, υπάρχει $\alpha \in |\mathcal{A}|$ για το οποίο το $\psi(\alpha)$ δεν αληθεύει στην $\mathcal{A}$. Άρα, ισχύει η (4) γιατί υπάρχει ένα στοιχείο του σύμπαντος, για το οποίο δεν αληθεύει η υπόθεση της συνεπαγωγής.

Πρέπει να δείξουμε και το αντίστροφο, δηλαδή ότι η (4) συνεπάγεται την (3). Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, η (4) αληθεύει ανν

$$\text{αν υπάρχει } \alpha \in |\mathcal{A}| \text{ τέτοιο ώστε (αν } \mathcal{A} \models \psi(\alpha), \text{ τότε } \mathcal{A} \models \varphi)$$

Αν υπάρχει $\alpha \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi(\alpha)$, το φ ανεξάρτητα από την αποτίμηση της μεταβλητής x, αφού η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ. Επομένως ισχύει η (3) γιατί η συνεπαγωγή έχει αληθές συμπέρασμα. Αν για κάθε $\alpha \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \not\models \psi(\alpha)$, η (3) ισχύει γιατί η υπόθεση της συνεπαγωγής (δηλ. ο υποτύπος $\forall x \psi(x)$) είναι ψευδής. □