Γλώσσες Χωρίς Συμφραζόμενα

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Γλώσσα χωρίς Συμφραζόμενα

- Γραμματική χωρίς Συμφραζόμενα:
  - Παραγωγές $P \subseteq (V - T) \times V^*$ ή $A \to w$, $w \in V^*$ (μόνο ένα τερματικό σύμβολο στα αριστερά).
  - Κανόνες εφαρμόζονται ανεξάρτητα από συμφραζόμενα του τερματικού συμβόλου (context-free).
- L είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (ΓχΣ) αν παράγεται από γραμματική χωρίς συμφραζόμενα.

$$V = \{0, 1, S\}\,, \quad T = \{0, 1\}\,, \quad S$$

Παραγωγές P
$S \to 0S1$
$S \to \varepsilon$

Παραγωγές P
$S \to 0S0 \mid 1S1$
$S \to 0 \mid 1 \mid \varepsilon$

Παράδειγμα

- Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G(V, T, S, P):

$$V = \{0, 1, S\}\,, \quad T = \{0, 1\}\,, \quad S$$

Παραγωγές P
$S \to 0S1$
$S \to \varepsilon$

- Γλώσσα $L(G) = \{0^n 1^n : n \geq 0\}$
- Υπάρχουν γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα που **δεν** είναι κανονικές.

Παράδειγμα

- Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G(V, T, S, P):

$$V = \{(,), S\}, \quad T = \{(,)\}, \quad S$$

Παραγωγές P
$S \to (S) \mid SS$
$S \to \varepsilon$

$$L(G) = \{w \in \{(,)\}^* : w \text{ έχει σωστά ``ζυγισμένες'' παρενθέσεις}\}$$

Παράδειγμα

- Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για γλώσσα $L = \{u \in \{0,1\}^* : u = ww^R\}$ (παλίνδρομα άρτιου μήκους).

Παραγωγές P
$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$

- Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για γλώσσα όλων των συμβ/ρών που **δεν** είναι παλινδρομικές.

Παραγωγές P
$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid A$
$A \to 1B0 \mid 0B1$
$B \to 0B \mid 1B \mid \varepsilon$

Εκφραστικότητα

- Γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα περιγράφουν:
  - Μικρά υποσύνολα φυσικών γλωσσών.
  - Αριθμητικές εκφράσεις.
  - **Γλώσσες προγραμματισμού** (C, C++, Pascal, …).
    - Συνήθως σε Backus-Naur form.

$$V = \{E, O, \Pi, (,), \times, +, x, y, z, \ldots\}$$
$$T = \{(,), \times, +, x, y, z, \ldots\}$$
$$E$$

Παραγωγές P
$E \to O \mid E + O$
$O \to \Pi \mid O \times \Pi$
$\Pi \to (E) \mid x \mid y \mid z \mid \ldots$

$$\begin{aligned} \langle expression \rangle &::= \langle term \rangle \mid \langle expression \rangle + \langle term \rangle \\ \langle term \rangle &::= \langle factor \rangle \mid \langle term \rangle \times \langle factor \rangle \\ \langle factor \rangle &::= (\langle expression \rangle) \mid x \mid y \mid z \mid \ldots \end{aligned}$$

Κλειστότητα

- Οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστές ως προς ένωση και παράθεση (και Kleene star).
  - Έστω ΓχΣ $G_1(V_1, T_1, S_1, P_1)$ και $L_1 = L(G_1)$.
    Έστω ΓχΣ $G_2(V_2, T_2, S_2, P_2)$ και $L_2 = L(G_2)$.
    Θεωρούμε ότι $(V_1 - T_1) \cap (V_2 - T_2) = \varnothing$
  - Ένωση $L_1 \cup L_2$:
    - Νέο αρχικό σύμβολο S, δύο νέες παραγωγές $S \to S_1 \mid S_2$
    - $G(V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$
  - Παράθεση $L_1 L_2$:
    - Νέο αρχικό σύμβολο S, νέα παραγωγή $S \to S_1S_2$
    - $G(V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, T_1 \cup T_2, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1S_2\})$

Κλειστότητα

- Οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστές ως προς Kleene star (και ένωση και παράθεση).
  - Έστω ΓχΣ G(V, T, S, P) και L = L(G).
  - Kleene star L^*:
    - Νέο αρχικό σύμβολο S′, νέα παραγωγή $S' \to S'\,S \mid \varepsilon$
    - $G(V \cup \{S'\}, T, S, P \cup \{S' \to S'\,S \mid \varepsilon\})$
- Παράδειγμα: Ν.δ.ο. $L = \{a^i b^j c^k : j = i + k\}$ είναι ΓχΣ.
  - Έστω $L_1 = \{a^i b^i : i \geq 0\}$ και $L_2 = \{b^k c^k : k \geq 0\}$
  - $L = L_1 L_2$ (παράθεση των δύο γλωσσών).

Περιοδικότητα ΓχΣ

- (Άπειρη) κανονική γλώσσα: μεγάλη συμβ/ρά οδηγεί DFA σε ίδια κατάσταση («κύκλος»).
  - Επανάληψη τμήματος συμβ/ράς που αντιστοιχεί σε κύκλο οδηγεί σε τελική κατάσταση (συμβ/ρά της γλώσσας).
- (Άπειρη) ΓχΣ L παράγεται από γραμματική G(V, T, S, P).
  - Έστω συμβ/ρά $w = uvxyz$: κατά την παραγωγή της εφαρμόζονται δύο διαφορετικές παραγωγές για μη-τερμ. A: $S \Rightarrow^* uAz \Rightarrow^* uvAyz \Rightarrow^* uvxyz$ με $A \Rightarrow^* vAy$ και $A \Rightarrow^* x$
  - Γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα: για κάθε $n \geq 0$, εφαρμογή 1ης n φορές και μετά 2ης δίνει $uv^nxy^nz \in L$

$$S \Rightarrow^* uAz \Rightarrow^* uvAyz \Rightarrow^* uv^2Ay^2z \Rightarrow^* \cdots \Rightarrow^* uv^nxy^nz$$

$S \to SS \mid (S) \mid \varepsilon$

$(()())()$

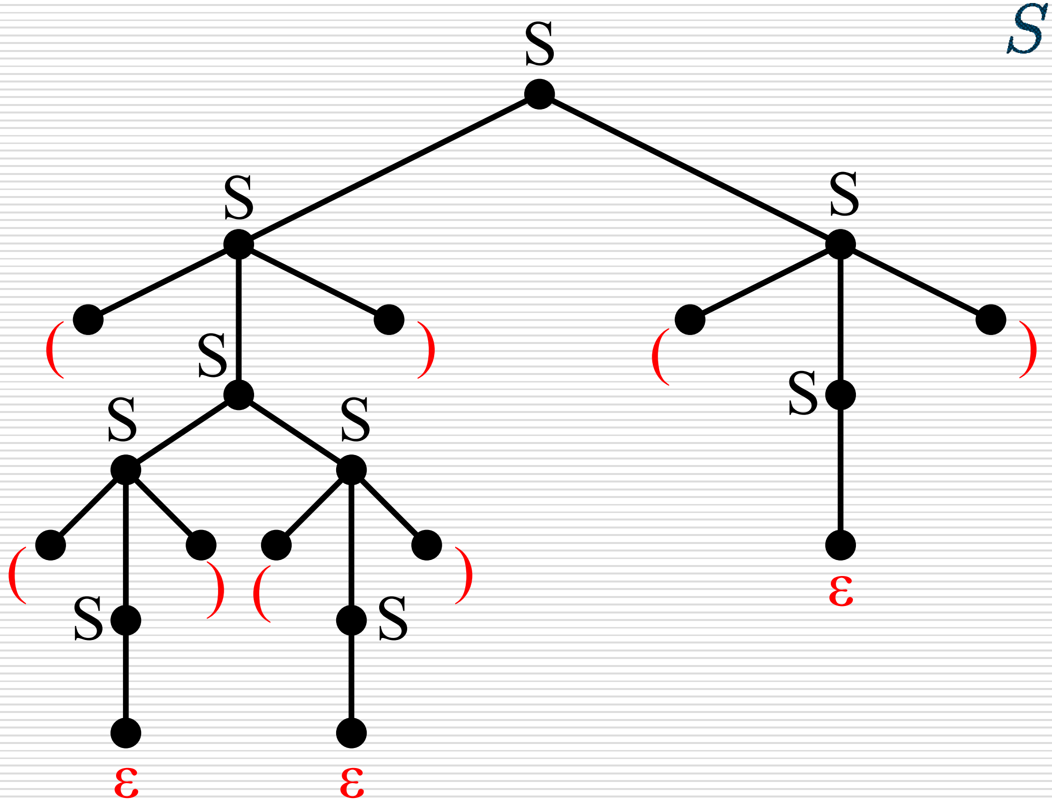
Συντακτικά Δέντρα (parse trees)

- … απεικονίζει την παραγωγή συμβ/ράς από γραμματική G(V, T, S, P):
  - Ρίζα επιγράφεται με αρχικό σύμβολο S.
  - Κόμβοι επιγράφονται με σύμβολα του V.
    - Ενδιάμεσοι κόμβοι επιγράφονται με **μη-τερματικά**.
    - Φύλλα επιγράφονται με **τερματικά** ή ε.
  - (Ενδιάμεσος) κόμβος με επιγραφή A και παράθεση επιγραφών παιδιών του $u \in V^*$: εφαρμογή κανόνα $A \to u$.
  - Παράθεση επιγραφών φύλλων από αριστερά προς δεξιά δίνει τη συμβ/ρά που παράγεται από συντακτικό δέντρο.

Παράδειγμα

$$S \to SS \mid (S) \mid \varepsilon$$

$$(()())()$$



Μεγάλες Συμβολοσειρές

- Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G(V, Σ, S, P):
  - **Εύρος** $\varphi(G)$: μέγιστος #συμβόλων σε δεξιό μέλος κανόνα.
    - Κάθε κόμβος συντακτικού δέντρου έχει $\leq \varphi(G)$ παιδιά.
  - Παραγόμενη συμβ/ρά από συντακτικό δέντρο ύψους h έχει μήκος $\leq \varphi(G)^h$
  - Κάθε συμβ/ρά με μήκος $> \varphi(G)^{|N|}$ παράγεται από συντακτικό δέντρο ύψους $\geq |N| + 1$.
    - $N = V - \Sigma$ σύνολο μη τερματικών, $|N|$ = #μη τερματικών.
    - Υπάρχει κλάδος με $\geq |N| + 2$ σύμβολα, 1 τερματικό.
    - Υπάρχει κλάδος όπου κάποιο μη-τερματικό σύμβολο εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές.

Μεγάλες Συμβολοσειρές

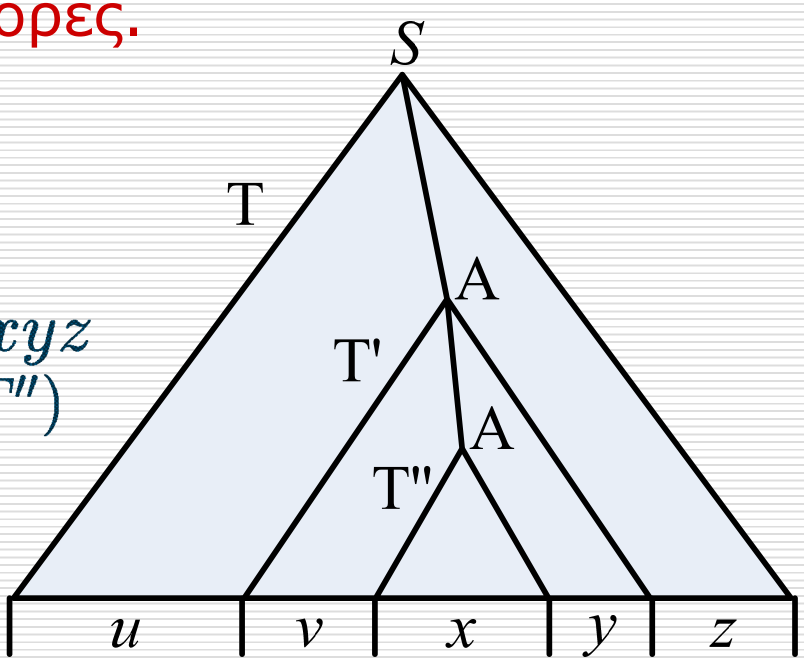
- Γραμματική χωρίς συμφραζόμενα G(V, Σ, S, P).
  Κάθε συμβ/ρά w, $|w| > \varphi(G)^{|N|}$ παράγεται από συντακτικό δέντρο με κλάδο όπου κάποιο μη-τερματικό εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές.
  - Έστω $w = uvxyz$
  - Παραγωγή αναλύεται:

$$A \Rightarrow^* vAy \; (T')$$

$$S \Rightarrow^* uAz \Rightarrow^* uvAyz \Rightarrow^* uvxyz$$

$$S \Rightarrow^* uAz \qquad A \Rightarrow^* x \; (T'')$$

  - Για κάθε #εφαρμογών 1ης παραγωγής παίρνουμε συμβ/ρά στη γλώσσα L(G).

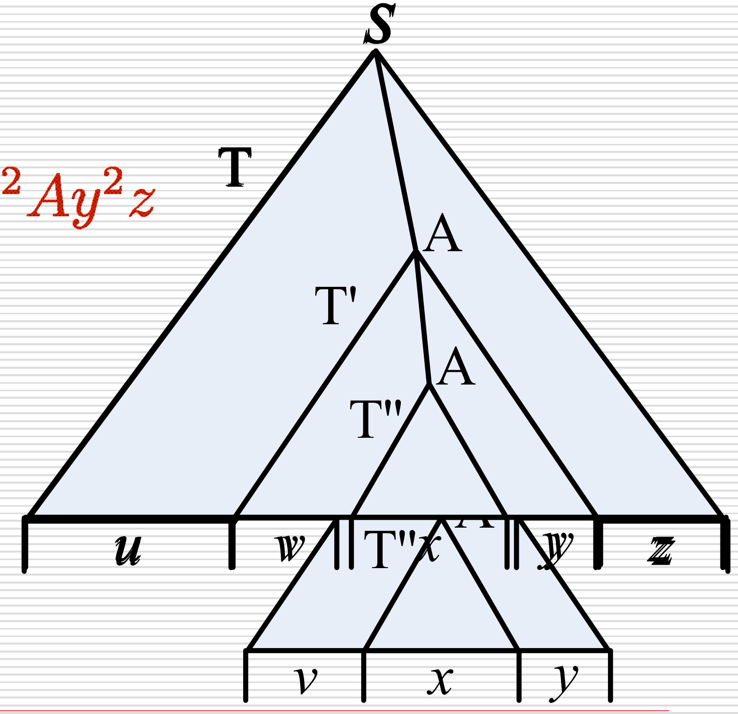


«Φούσκωμα» Συμβολοσειράς

- Κάθε συμβ/ρά w, $|w| > \varphi(G)^{|N|}$, γράφεται $w = uvxyz$ ώστε $uv^n xy^n z \in L(G)$ για κάθε $n \geq 0$.

$$S \Rightarrow^* uAz \Rightarrow^* uvAyz \Rightarrow^* uvxyz = w$$

  - $n = 0$: $S \Rightarrow^* uAz \Rightarrow^* uxz$
  - $n = 1$: εξ' ορισμού.
  - $n = 2$: $S \Rightarrow^* uAz \Rightarrow^* uvAyz \Rightarrow^* uv^2Ay^2z$
  - … κοκ.



Θεώρημα Άντλησης (Pumping Lemma)

- Για κάθε γλώσσα L χωρίς συμφραζόμενα, υπάρχει $k \geq 1$ ώστε κάθε $w \in L$, $|w| > k$, γράφεται $w = uvxyz$:
  1. για κάθε $n \geq 0$, $uv^n xy^n z \in L$.
  2. $|vy| > 0$ (τουλ. ένα από τα v, y μη-κενό).
  3. $|vxy| \leq k$
- Απόδειξη:
  - Αποδείξαμε το (1).
  - Για (2), συντακτικό δέντρο με ελάχιστο αριθμό κόμβων.
    - Κάθε κανόνας συνεισφέρει στην τελική συμβ/ρά.
  - Για (3), θεωρούμε δύο κατώτερες εμφανίσεις Α στον αντίστοιχο κλάδο.

Εφαρμογές

- Γλώσσα $L = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ δεν είναι ΓχΣ.
  - Έστω αυθαίρετο $k \geq 0$ (pumping length).
  - Θεωρούμε $w = a^k b^k c^k$ και u, v, x, y, z ώστε
    (i) $|vy| > 0$, (ii) $|vxy| \leq k$, και (iii) $w = uvxyz$.
  - Λόγω (i) και (ii), συμβ/ρά vy περιέχει τουλάχιστον 1 και το πολύ 2 σύμβολα από a, b, c.
  - Άρα $uv^2xy^2z \notin L$ γιατί περιέχει διαφορετικό αριθμό a, b, c.

Εφαρμογές

- Γλώσσα $L = \{a^i b^j c^m : 0 \leq i \leq j \leq m\}$ δεν είναι ΓχΣ.
  - Έστω αυθαίρετο k ≥ 0 (pumping length).
  - Θεωρούμε $w = a^k b^k c^k$ και u, v, x, y, z ώστε (i) |v y| > 0, (ii) |v x y| ≤ k, και (iii) w = u v x y z .
  - Λόγω (i) και (ii), συμβ/ρά v y περιέχει τουλάχιστον 1 και το πολύ 2 σύμβολα από a, b, c.
    - Αν v y περιέχει c (οπότε δεν περιέχει a), τότε $uv^0xy^0z \notin L$ γιατί περιέχει περισσότερα a από b ή c.
    - Αν v y δεν περιέχει c, τότε $uv^2xy^2z \notin L$ γιατί περιέχει λιγότερα c από a ή b.

Εφαρμογές

- Γλώσσα $L = \{ww : w \in \{0,1\}^*\}$ δεν είναι ΓχΣ.
  - Έστω αυθαίρετο $k \geq 0$ (pumping length).
  - Θεωρούμε $w = 0^k 1^k 0^k 1^k$ και u, v, x, y, z ώστε
    (i) $|vy| > 0$, (ii) $|vxy| \leq k$, και (iii) $w = uvxyz$.
  - Αν vxy περιορίζεται στο 1ο μισό, δηλ. $|uvxy| \leq 2k$:
    - $uv^2xy^2z \notin L$ γιατί πρώτο σύμβολο του 2ου μισού είναι 1.
  - Παρόμοια αν vxy περιορίζεται στο 2ο μισό.
  - Αν vxy κατανέμεται και στα 2 μισά:
    - $uv^0xy^0z = 0^k 1^i 0^j 1^k \notin L$ γιατί $i < k, j \leq k$ ή $i \leq k, j < k$.

Εφαρμογές

- Γλώσσα $L = \{1^n : n \textbf{ είναι πρώτος}\}$ δεν είναι ΓχΣ.
  - Έστω αυθαίρετο $k \geq 0$ (pumping length).
  - Θεωρούμε $w = 1^p$, p ελάχιστος πρώτος $> k$, και u, v, x, y, z: (i) $|vy| > 0$, (ii) $|vxy| \leq k$, και (iii) $w = uvxyz$.
  - Έστω $|vy| = t > 0$.
  - Τότε $|uv^n xy^n z| = p+(n-1)t$.
  - Για $n = p+1$, ο αριθμός $p+pt = p(t+1)$ **δεν** είναι **πρώτος**.
    - Άρα $uv^{p+1}xy^{p+1}z \notin L$
  - Για αλφάβητα ενός συμβόλου, ΓχΣ είναι κανονικές.

Εφαρμογές

- Ισχύει ότι η τομή μιας γλώσσας χωρίς συμφραζόμενα με μία κανονική γλώσσα είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
- Γλώσσα $L = \{w \in \{a, b, c\} : w \text{ έχει ίσο αριθμό } a, b \text{ και } c\}$ δεν είναι χωρίς συμφραζόμενα.
  - Η γλώσσα $L_1 = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ είναι τομή της L με κανονική γλώσσα $a^* b^* c^*$.
  - Αν L ήταν ΓχΣ, θα ήταν και η L_1. Άτοπο.

Μη-Κλειστότητα

- Η κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα **δεν** είναι κλειστή ως προς συμπλήρωμα και τομή.
  - $L_1 = \{a^n b^n c^m : n \geq 0, m \geq 0\}$ γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
  - $L_2 = \{a^m b^n c^n : m \geq 0, n \geq 0\}$ γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
  - Τομή $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$ **δεν** είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.
  - Μη-κλειστότητα ως προς συμπλήρωμα: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$