Γεννήτριες Συναρτήσεις

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αναπαράσταση Ακολουθιών

- **Ακολουθία**: αριθμητική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το N.
- Με γενικό (ή «κλειστό») τύπο a_n: n-οστός όρος συναρτήσει n.
- Κωδικοποίηση σε δυναμοσειρά μιας (πραγματικής) μεταβλητής x.
- Γεννήτρια Συνάρτηση (ΓΣ) A(x) ακολουθίας **a**: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
  - Συντελεστής του x^n αντιστοιχεί σε n-οστό όρο ακολουθίας **a**.
  - Επιλέγουμε διάστημα τιμών x ώστε σειρά να συγκλίνει (**πάντα**!).
  - Έτσι θεωρούμε ότι A(x) άπειρα παραγωγίσιμη (αναλυτική). Παραγωγίζουμε/ολοκληρώνουμε την A(x) ως πεπερασμένο άθροισμα.
- Κάθε ακολουθία **a** αντιστοιχεί σε μοναδική ΓΣ A(x).
- ΓΣ A(x) αντιστοιχεί σε μοναδική ακολουθία: $a_n = (1/n!)A^{(n)}(0)$
- Μετασχηματισμός και «αλγεβρικός» χειρισμός ακολουθιών και επίλυση των προβλημάτων που κωδικοποιούν.

Παραδείγματα

- ΓΣ ακολουθίας 1, 1, 1, 1, ... : $1/(1-x)$
- ΓΣ ακολουθίας $a_n = b\,\lambda^n$: $b/(1-\lambda x)$
- ΓΣ για πεπερασμένες ακολουθίες (υπόλοιποι όροι θεωρούνται 0).
  - ΓΣ ακολουθίας 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5: $x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6$
  - ΓΣ ακολουθίας $a_k = C(n, k)$: $(1+x)^n$
- ΓΣ ακολουθίας $a_n = n+1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

  - ΓΣ ακολουθίας $\beta_n = n$: $B(x) = x/(1-x)^2$
- Ακολουθία που αντιστοιχεί σε ΓΣ $A(x) = 5/(1-4x)$: $a_n = 5\,4^n$

Παραδείγματα

- Ακολουθία αντιστοιχεί σε ΓΣ A(x) = 1/(1+x);
  - Γενικευμένο δυωνυμικό ανάπτυγμα (όταν n δεν είναι φυσικός):

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k$$

  - Ειδικότερα, αν n φυσικός: $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$
  - Δηλαδή η $1/(1-x)^n$ είναι η ΓΣ για συνδυασμούς k από n αντικείμενα με επανάληψη (ή διανομή k ίδιων αντικειμένων σε n διακ. υποδοχές).
- Με βάση γενικευμένο δυωνυμικό ανάπτυγμα,

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1-1)\cdots(-1-k+1)}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k$$

  - Άρα η ΓΣ A(x) = 1/(1+x) αντιστοιχεί στην ακολουθία $a_n = (-1)^n$

Πράξεις Ακολουθιών

- Πράξεις μεταξύ ακολουθιών:
  - Διαβάθμιση με συντελεστή c: $(c\boldsymbol{\alpha})_n = c\alpha_n$
  - Γραμμικός συνδυασμός: $(c\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\beta})_n = c\alpha_n + d\beta_n$
  - Δεξιά ολίσθηση κατά k θέσεις:
    $$(S^k\boldsymbol{\alpha})_n = \begin{cases} 0 & \text{για } n = 0, \ldots, k-1 \\ \alpha_{n-k} & \text{για } n \geq k \end{cases}$$
  - Αριστερή ολίσθηση κατά k θέσεις: $(S^{-k}\boldsymbol{\alpha})_n = a_{n+k}$
  - Ακολουθία μερικών αθροισμάτων: $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$
  - Ακολουθία συμπληρωματικών μερικών αθροισμάτων: $\delta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k$
  - Ευθεία διαφορά: $(\Delta\boldsymbol{\alpha})_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$
  - Ανάστροφη διαφορά (ολίσθ. ευθείας 1 θέση δεξιά): $(\nabla\boldsymbol{\alpha})_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$
  - Συνέλιξη: $(\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta})_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$

Βασικές Ιδιότητες

- Γραμμική ιδιότητα:
  - Η ακολουθία c**α** + d**β** έχει ΓΣ την c A(x) + d B(x).
  - Η ΓΣ $\frac{10-38x}{1-6x+8x^2} = \frac{1}{1-4x} + \frac{9}{1-2x}$ έχει ακολουθία την $4^n + 9 \cdot 2^n$
  - Η ΓΣ $\frac{9-47x}{1-10x+21x^2} = \frac{5}{1-3x} + \frac{4}{1-7x}$ έχει ακολουθία την $5 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n$
- Ιδιότητα ολίσθησης:
  - Η ακολουθία S^k **α** έχει ΓΣ την x^k A(x), αφού:

$$x^k A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+k} = \sum_{n=0}^{k-1} 0x^n + \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{n-k} x^n$$

  - Π.χ. 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, ... έχει ΓΣ την $x^4/(1-x)$
    0, 0, 1, 2, 4, …, 2^{n-2} έχει ΓΣ την $x^2/(1-2x)$
  - Η ακολουθία S^{-k} **α** έχει ΓΣ την $x^{-k}\left(A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i x^i\right)$
  - Π.χ. η ακολουθία $a_n = 2^{n+3}$ έχει ΓΣ την

$$x^{-3}\left[\frac{1}{1-2x} - 1 - 2x - 4x^2\right] = \frac{8}{1-2x}$$

Βασικές Ιδιότητες

- Μερικών αθροισμάτων: $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$
  - Παρατηρούμε ότι $a_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$
  - Άρα $A(x) = \Gamma(x) - x\Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(x) = A(x) / (1-x)$.
  - Π.χ. $\gamma_n = n+1$ είναι ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $a_n = 1$.
    - Άρα έχει ΓΣ την $\Gamma(x) = 1/(1-x)^2$
  - Ποια είναι η ΓΣ της $\beta_n = n(n+1)/2$;
    - Η β_n αποτελεί δεξιά ολίσθηση κατά 1 θέση της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της γ_n.
    - Άρα έχει ΓΣ την $B(x) = x/(1-x)^3$
- Συνέλιξη $\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta}$ έχει ΓΣ την $A(x)\,B(x)$.
  - Ο συντελεστής του x^n στο $A(x)\,B(x)$ είναι $(\boldsymbol{\alpha} * \boldsymbol{\beta})_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$
  - Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k 2^{n-k}$
    - Από ιδιότητα συνέλιξης, $A(x) = 1/[(1-3x)(1-2x)]$

Βασικές Ιδιότητες

- Ιδιότητα της Κλίμακας:
  - Η ακολουθία $\gamma_n = n\,\alpha_n$ έχει ΓΣ την $\Gamma(x) = x\,A'(x)$, αφού

$$\Gamma(x) = xA'(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n x^n)' = x\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n\alpha_n)x^n$$

  - Η ακολουθία $\delta_n = \alpha_n/(n+1)$ έχει ΓΣ την $\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz$

$$\Delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x A(z)dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x \alpha_n z^n dz = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}x^n$$

Παραδείγματα

- Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\boldsymbol{\beta} = c\,\boldsymbol{\alpha} + d$;
  - $B(x) = c\,A(x) + d/(1-x)$
- Ποια είναι η ΓΣ της ακολουθίας $\beta_n = c^n \alpha_n$;
  - $B(x) = A(cx)$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την $A(x) = 4x + 2/(1-3x)$;
  - $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 10$, $\alpha_n = 2\,3^n$, για $n \geq 2$.
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την $A(x) = 2/(1 - 4x^2)$;
  - Ανάλυση σε κλάσματα: $A(x) = 1/(1-2x) + 1/(1+2x)$
  - Ακολουθία $\alpha_n = 2^n + (-2)^n$
- Ποια είναι η ακολουθία με ΓΣ την $A(x) = \frac{22x^3-9x^2-14x-1}{(1+x)(1+3x)(1-2x)^2}$
  - Ανάλυση σε κλάσματα: $A(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+3x} - \frac{1}{1-2x} - \frac{2}{(1-2x)^2}$
  - Ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n + (-3)^n - 2^n - (n+1)2^{n+1}$

Εφαρμογές

- ... των ΓΣ είναι πολλές και σημαντικές. Μεταξύ άλλων:
  - Υπολογισμός αθροισμάτων.
  - Επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής.
  - Επίλυση αναδρομικών εξισώσεων.
- Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων:
  - Διατύπωση με βάση μια ακολουθία (ή συνδυασμό ακολουθιών) ώστε ο «κλειστός» τύπος για τον n-οστό όρο να δίνει τη λύση.
  - Υπολογισμός της ΓΣ της ακολουθίας (με βάση ιδιότητες ΓΣ).
  - Ανάπτυγμα ΓΣ και υπολογισμός έκφρασης για n-οστό όρο.
- Υπολογισμός αθροίσματος $\sum_{k=0}^{n} 3^k 2^{n-k}$
  - ΓΣ αντίστοιχης ακολουθίας **a** είναι η $A(x) = 1/[(1-3x)(1-2x)]$
  - Ανάλυση σε κλάσματα: $A(x) = 3/(1-3x) - 2/(1-2x)$
  - Άθροισμα = $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

Υπολογισμός Αθροισμάτων

- Υπολογισμός αθροίσματος $\sum_{k=0}^{n} k^2$
  - Ακολουθία $a_n = n$ έχει ΓΣ την $A(x) = x/(1-x)^2$
  - Ιδιότητα κλίμακας: $\beta_n = n^2$ έχει ΓΣ την $B(x) = x(1+x)/(1-x)^3$
  - Άθροισμα αντιστοιχεί στην ακολουθία μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας β, η οποία έχει ΓΣ την $\Gamma(x) = x(1+x)/(1-x)^4$
  - Χρησιμοποιούμε $(1-x)^{-4} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{4+k-1}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$
  - ... και έχουμε: $\frac{x^2}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{3} x^k \quad \text{και} \quad \frac{x}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+2}{3} x^k$
  - Άθροισμα = $\binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$
- Ομοίως να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n} k^3$