

Συνδυαστική Απαρίθμηση

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Συνδυαστική Απαρίθμηση

- Υπολογισμός (με συνδυαστικά επιχειρήματα) του **πλήθους των διαφορετικών αποτελεσμάτων** ενός «πειράματος».
 - «Πείραμα»: διαδικασία με συγκεκριμένο (πεπερασμένο) σύνολο παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.
 - Π.χ. ρίψη ζαριών, μοίρασμα τράπουλας, ανάθεση γραφείων, επιλογή password, βάδες Lotto, ...
 - Πληθάριθμος δυναμοσυνόλου: αν $|A| = n$, τότε $|P(A)| = 2^n$
- Βασικές αρχές και έννοιες:
 - Κανόνες **γινομένου** και **αθροίσματος**, αρχή **εγκλεισμού – αποκλεισμού**.
 - **Διατάξεις** και **μεταθέσεις** (με ή χωρίς) επανάληψη.
 - **Συνδυασμοί** (με ή χωρίς) επανάληψη.

Κανόνας Γινομένου

- Πείραμα **A** με **n** αποτελέσματα. Πείραμα **B** με **m** αποτελέσματα.
- Αν **αποτελέσματα** A και B είναι **ανεξάρτητα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων **A και B** έχει **$n \times m$** αποτελέσματα.
 - **Ανεξάρτητα**: το αποτέλεσμα του A **δεν επηρεάζει** (ως προς τον αριθμό των αποτελεσμάτων) το αποτέλεσμα του B, και αντίστροφα.
 - Π.χ. $|A \times B| = |A| \times |B|$
 - Επιλογή ενός **ψηφίου 0-9** και **ενός κεφαλαίου** Ελληνικού γράμματος:
 - $10 \times 24 = 240$ διαφορετικά αποτελέσματα.
 - #συμβ/ρών (με κεφαλαία Ελληνικά) μήκους 10: 24^{10}
 - #παλινδρομικών συμβ/ρών μήκους 10: 24^5
 - #συναρτήσεων από A στο B ($|A| = n, |B| = m$): m^n
 - #συναρτήσεων **1-1** από A στο B ($m \geq n$): $m(m-1) \cdots (m-n+1)$

Κανόνας Αθροίσματος

- Πείραμα A με n αποτελέσματα. Πείραμα B με m αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα A και B είναι **αμοιβαία αποκλειόμενα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων A ή B έχει $n+m$ αποτελέσματα.
 - **Αμοιβαία αποκλειόμενα**: η παρατήρηση αποτελέσματος του A αποκλείει την παρατήρηση αποτελέσματος του B , και αντίστροφα.
 - $|A \cup B| = |A| + |B|$, αν $|A \cap B| = \emptyset$
 - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία.
 - Τρόποι να **διαλέξουμε 2 βιβλία σε διαφορετική γλώσσα**:
 - Ελλ. – Αγγλ.: $5 \times 7 = 35$
 - Ελλ. – Γερμ.: $5 \times 10 = 50$
 - Αγγλ. – Γερμ.: $7 \times 10 = 70$
 - Αμοιβαία αποκλειόμενα. Σύνολο: **155** διαφορετικές επιλογές.
 - Τρόποι να **διαλέξουμε 2 βιβλία**: $\frac{22 \times 21}{2} = 231$

Παραδείγματα

- **#passwords** με 6 – 8 χαρακτήρες αποτελούμενα από κεφαλαία (Αγγλικά) γράμματα και (τουλάχιστον ένα) δεκαδικό ψηφίο.
 - **#passwords** μήκους $k = 36^k - 26^k$
 - **#passwords** = $(36^6 + 36^7 + 36^8) - (26^6 + 26^7 + 26^8)$
- **#passwords** μήκους 2 από A, B, C, D και 0, 1, 2 με τουλάχιστον ένα ψηφίο.
 - **Σωστό** το $7^2 - 4^2 = 33$. **Λάθος** το (γιατί;) $2 \times 3 \times 7 = 42!$
- **#δυναμικών συμβ/ρών** μήκους 8 που **είτε** αρχίζουν από 1 **είτε** τελειώνουν σε 00:
 - **Όχι αμοιβαία αποκλειόμενα:** $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$.