

# Μη-Αριθμήσιμα Σύνολα, Διαγωνιοποίηση

---

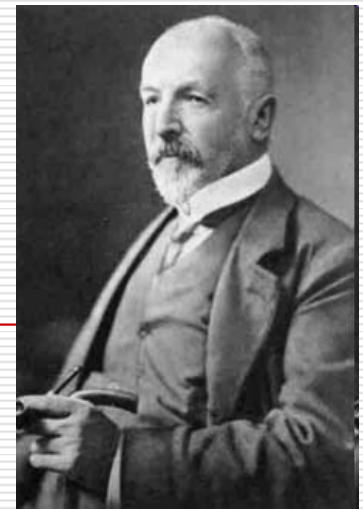
Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

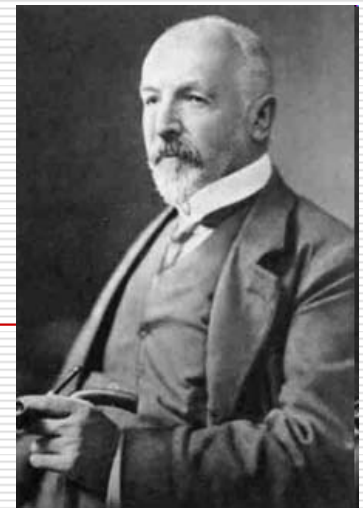


# Αριθμήσιμα Σύνολα



- Σύνολο **πεπερασμένο** αν έχει πεπερασμένο πληθικό αριθμό, διαφορετικά **άπειρο**.
- **Cantor**, 1873: Σύγκριση μεγεθών **άπειρων** συνόλων.
- **Ισάριθμα** σύνολα A και B:
  - Υπάρχει **1-1 και επί** συνάρτηση (**αντιστοιχία**)  $f : A \rightarrow B$ .  
Υπάρχει **τέλειο ταίριασμα** μεταξύ στοιχείων A και στοιχείων B.  
Π.χ.  $\{1, 2, 3, 4\}, \{A, B, \Gamma, \Delta\}$ :  $(1, A), (2, B), (3, \Gamma), (4, \Delta)$ .
- **Πεπερασμένο** σύνολο A:
  - **Ισάριθμο του**  $\{1, \dots, n\}$ , για κάποιο φυσικό  $n \geq 1$ .  
Το  $n$  είναι ο **πληθικός αριθμός** του συνόλου A.
- **Αριθμήσιμο** σύνολο A: **πεπερασμένο ή ισάριθμο του N**.
  - Υπάρχει τέλειο ταίριασμα στοιχείων A με φυσικούς αριθμούς.  
Με  $\{1, \dots, |A|\}$  αν A πεπερασμένο, με N αν A άπειρο.

# Αριθμήσιμα Σύνολα

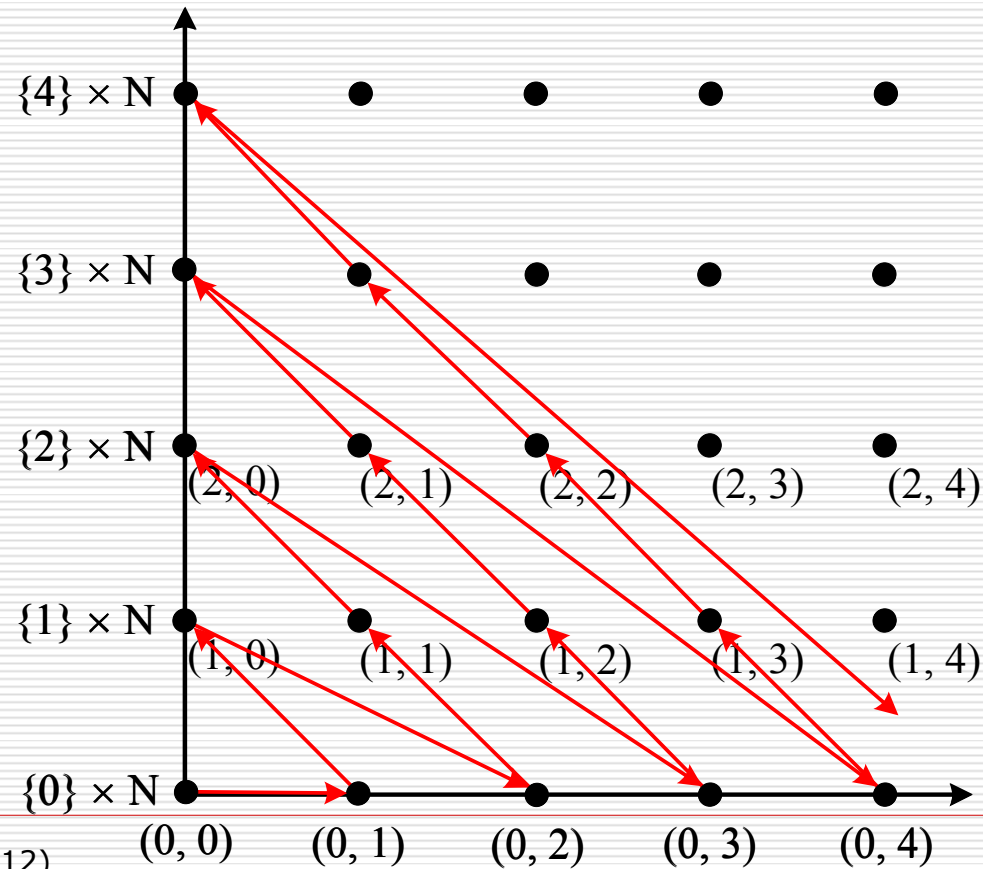


- Διαδικασία **(απ)αρίθμησης** στοιχείων συνόλου A:
  - Εξελίσσεται σε διακριτά βήματα: 1, 2, 3, ...  
Κάθε βήμα απαριθμεί διαφορετικό στοιχείο.
  - Κάθε συγκεκριμένο στοιχείο απαριθμείται σε συγκεκριμένο **(πεπερασμένο) βήμα**.
  - Αριθμήσιμο σύνολο επιδέχεται **διαδικασίας απαρίθμησης**.
- Παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων:
  - Σύνολο **θετικών ζυγών** αριθμών: αριθμός  $i$  στο βήμα  $i/2$ , ή  $f(i) = i/2$ .
  - Σύνολο **ακεραίων** αριθμών:  $f(i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = 0 \\ 2i + 1 & \text{αν } i \text{ θετικός} \\ 2|i| & \text{αν } i \text{ αρνητικός} \end{cases}$
  - Ένωση **πεπερασμένου** πλήθους **αριθμήσιμων** συνόλων.  
Π.χ. ένωση  $k$  άπειρων **(ξένων μεταξύ τους)** συνόλων:  $\{1, \dots, k\} \times \mathbb{N}$   
$$f(i, j) = jk + i, i \in \{1, \dots, k\}, j \in \mathbb{N}$$

# Αριθμήσιμα Σύνολα

- Παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων:
  - Ένωση αριθμήσιμα άπειρου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων, π.χ.  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$f(i, j) = \frac{1}{2}[(i + j)^2 + 3i + j]$$



# (Μη-)Αριθμήσιμα Σύνολα

---

- Άλλα παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων:
  - Σύνολο **ρητών** (κλασματικών) αριθμών  $\mathbb{Q}$ 
    - Παρόμοια με το  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .
  - Σύνολο **συμβολοσειρών** (πεπερασμένου, αλλά απεριόριστου, μήκους) με γράμματα της Ελληνικής γλώσσας.
    - Λεξικογραφική διάταξη.
- Υπάρχουν **μη-αριθμήσιμα** σύνολα;
  - Πραγματικοί αριθμοί  $\mathbb{R}$ , διαστήματα πραγματικών, π.χ.  $[0, 1]$ .
  - Δυναμοσύνολα (αριθμήσιμα) άπειρων συνόλων, π.χ.  $2^{\mathbb{N}}$ .
- Πως **αποδεικνύουμε** ότι ένα σύνολο είναι μη-αριθμήσιμο;
  - Cantor: αποδεικτική τεχνική της **διαγωνιοποίησης** το 1891.
  - Σημαντικότερες εφαρμογές, μεταξύ άλλων στη **Θεωρία Υπολογισμού** και στην **Υπολογιστική Πολυπλοκότητα**.

# Μη-Αριθμήσιμα Σύνολα

---

- Το  $2^{\mathbb{N}}$  είναι μη-αριθμήσιμο.
  - Έστω ότι  $2^{\mathbb{N}}$  αριθμήσιμο, άρα ισάριθμο του  $\mathbb{N}$ .
  - Άρα υπάρχει αντιστοιχία μελών του  $2^{\mathbb{N}}$  με φυσικούς στο  $\mathbb{N}$ .
  - Με βάση αυτή, απαριθμούμε  $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$ , όλα τα υποσύνολα φυσικών / στοιχεία του  $2^{\mathbb{N}}$ .
  - Έστω το σύνολο φυσικών  $D = \{ k \in \mathbb{N} : k \notin S_k \}$
  - Σε ποια θέση εμφανίζεται το  $D$  στην απαρίθμηση;
    - $D \neq S_0$  γιατί 0 ανήκει μόνο σε ένα από τα  $D$  και  $S_0$ .
    - $\forall m, D \neq S_m$  γιατί  $m$  ανήκει μόνο σε ένα από τα  $D$  και  $S_m$ . Τα  $D$  και  $S_m$  «διαφωνούν» στο στοιχείο  $m$ .
  - **Άτοπο:** το  $D$  δεν εμφανίζεται πουθενά στην απαρίθμηση!
  - Άρα το  $2^{\mathbb{N}}$  δεν είναι αριθμήσιμο.

# Διαγωνιοποίηση

- Έστω **ισάριθμα** σύνολα  $A$  και  $B$  και (διμελής σχέση)  $R \subseteq A \times B$ 
  - Αριθμήσιμα: θεωρούμε  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  και  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$
- Για κάθε  $a_k \in A$ , **γραμμή  $k$  της  $R$** :  $R_k = \{b_j \in B : (a_k, b_j) \in R\}$
- Συμπλήρωμα διαγωνίου  $D = \{b_k \in B : (a_k, b_k) \notin R\}$
- $D$  είναι **διαφορετικό** από **κάθε** γραμμή  $k$ .
  - Διαφέρει από  $R_1$  στο  $b_1$ , από  $R_2$  στο  $b_2$ , κοκ.

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$
$a_1$	×		×		×
$a_2$			×	×	×
$a_3$		×		×	
$a_4$	×			×	×
$a_5$		×	×		

$$R_1 = \{b_1, b_3, b_5\}$$

$$R_2 = \{b_3, b_4, b_5\}$$

$$R_3 = \{b_2, b_4\}$$

$$R_4 = \{b_1, b_4, b_5\}$$

$$R_5 = \{b_2, b_3\}$$

$$D = \{b_2, b_3, b_5\}$$

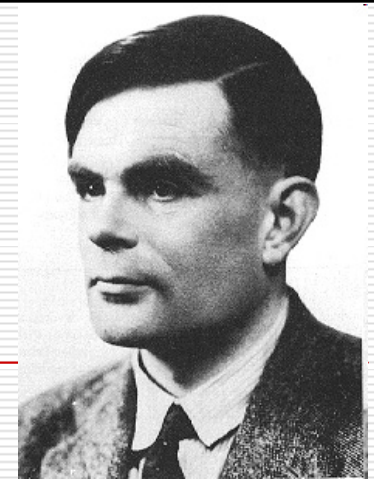
# Υπόθεση του Συνεχούς



- Cantor διατύπωσε και προσπάθησε να αποδείξει την Υπόθεση του Συνεχούς (Continuum Hypothesis):
  - Δεν υπάρχει σύνολο με πληθικό αριθμό ανάμεσα στο  $\aleph_0$  και στο  $\aleph_1$ .
- Gödel (1937) έδειξε ότι **υπόθεση** είναι **συμβατή** με τα αξιώματα της συνολοθεωρίας (άρα **δεν** υπάρχει **αντιπαράδειγμα**).
- Cohen (1963) έδειξε ότι **άρνηση** της υπόθεσης είναι **συμβατή** με τα αξιώματα της συνολοθεωρίας (άρα **δεν** υπάρχει **απόδειξη**).
- Υπόθεση του Συνεχούς δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί ούτε να καταρριφθεί!



# Μη Υπολογισιμότητα



- **Πρόβλημα Τερματισμού** (Halting Problem):
  - Μηχανή Turing που με είσοδο μηχανή Turing  $M$  και «δεδομένα»  $w$ , αποφαινεται αν  $M(w)$  τερματίζει.
- **A. Turing:** Πρόβλημα Τερματισμού **δεν** είναι **επιλύσιμο**.
- Θ.δ.ο. **δεν** υπάρχει **πρόγραμμα T** που με είσοδο πρόγραμμα  $\Pi$  και δεδομένα  $\Delta$ , αποφασίζει αν  $\Pi(\Delta)$  τερματίζει.
  - $\Pi(\Delta)$ : εκτέλεση προγράμματος  $\Pi$  με είσοδο αρχείο δεδομένων  $\Delta$ .

# Μη Υπολογισιμότητα

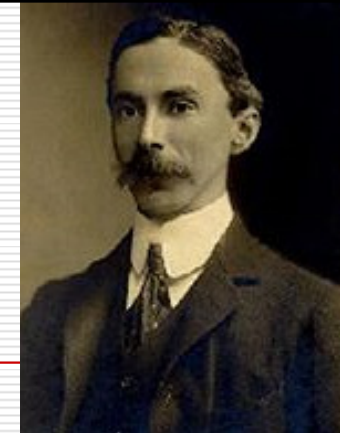
---

- Έστω πρόγραμμα  $T$ :  $T(\Pi, \Delta) = \text{ΝΑΙ}$  αν  $\Pi(\Delta)$  τερματίζει.
  - Πρόγραμμα  $\Pi$  και δεδομένα  $\Delta$  δίνονται στο  $T$  ως αρχεία  $\Pi$  (εκτελέσιμο αρχείο) και  $\Delta$  (οτιδήποτε αρχείο).
  - Δεδομένα μπορεί εκτελέσιμο αρχείο, και **αρχείο περιγραφής  $\Pi$** .  
 $T(\Pi, \Pi)$ : ελέγχει αν  $\Pi(\Pi)$  τερματίζει.
- Ορίζουμε πρόγραμμα  $D$  με είσοδο εκτελέσιμο αρχείο  $\Pi$ ,  $D(\Pi)$ :  
**if  $T(\Pi, \Pi) = \text{ΝΑΙ}$  then loop forever else halt**
  - $D(\Pi)$  **τερματίζει** αν  $\Pi(\Pi)$  **δεν** τερματίζει.
- Τι παράγει η κλήση  $D(D)$ ;
  - Αν  $D(D)$  **τερματίζει**,  $T(D, D) = \text{ΝΑΙ}$ , και  $D(D)$  **δεν** τερματίζει!
  - Αν  $D(D)$  **δεν** τερματίζει,  $T(D, D) = \text{ΟΧΙ}$ , και  $D(D)$  **τερματίζει!**
- **Αντίφαση**, άρα **δεν** υπάρχει τέτοιο πρόγραμμα!

# Διαγωνιοποίηση

- Προγράμματα (εκτελέσιμα αρχεία) είναι **αριθμήσιμα**:
  - $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$  μια απαρίθμηση τους.
- Έστω ότι υπάρχει πρόγραμμα  $T$  που για προγράμματα  $\Pi_i, \Pi_j$ ,  $T(\Pi_i, \Pi_j) = \text{ΝΑΙ}$  **ανν**  $\Pi_i(\Pi_j)$  τερματίζει.
  - Πρόγραμμα  $D$  που  $\forall \Pi_i, D(\Pi_i)$  τερματίζει ανν  $\Pi_i(\Pi_i)$  **δεν** τερματίζει.
  - $D$  εμφανίζεται στην απαρίθμηση:  $(D, \Pi_i) \in H$  ανν  $(\Pi_i, \Pi_i) \notin H$ .
- Σχέση  $H$ :  $(\Pi_i, \Pi_j) \in H$  ανν  $\Pi_i(\Pi_j)$  τερματίζει.
  - $(D, D)$  ανήκει στην  $H$ ;

	$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$	$\Pi_4$	...	$\cdot D$	...
$\Pi_1$	T	Δ	Δ	T		T	
$\Pi_2$	T	Δ	Δ	T	...	Δ	...
$\Pi_3$	Δ	T	Δ	Δ		T	
$\Pi_4$	T	Δ	T	T		T	
⋮			⋮		⋮		
$D$	Δ	T	T	Δ		?	
⋮			⋮				⋮



# Παράδοξο του Russel

- Σύνολα που ορίζονται με βάση **χαρακτηριστική ιδιότητα** στοιχείων τους και **χωρίς αναφορά** σε σύμπαν  $U$ .
- $S$  περιέχει σύνολα που δεν είναι στοιχεία του εαυτού τους.  
$$S = \{A \text{ σύνολο: } A \notin A\}$$
  - Κατά κανόνα, σύνολα **δεν** είναι **στοιχεία** του εαυτού τους, π.χ.  $N$  δεν είναι ακέραιος, ανθρωπότητα δεν είναι άνθρωπος.
  - Αλλά π.χ. σύνολο ιδεών μπορεί να θεωρηθεί ιδέα.
- Είναι το  $S$  στοιχείο του εαυτού του; Δηλ.  $S \in S$ ;
  - Αν  $S \in S$ , τότε  $S \notin S$ . Αν  $S \notin S$ , τότε  $S \in S$ . **Αντίφαση!**
- Υπάρχει κουρέας σε χωριό που ξυρίζει οποιονδήποτε δεν ξυρίζεται μόνος του.
  - $S(x, y)$ : « $x$  ξυρίζει  $y$ ».  $\exists x \forall y (S(x, y) \leftrightarrow \neg S(y, y))$
  - **Μη ικανοποιήσιμη δήλωση!** (Ποιός ξυρίζει τον κουρέα;)

# Παράδοξο του Russel

---

- Ανάγκη για αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων και των Μαθηματικών.
  - Σημαντικές ανακαλύψεις και επίδραση στη (μαθηματική) σκέψη.
- Ορισμός συνόλου με χαρακτηριστική ιδιότητα αναφέρεται σε συγκεκριμένο σύμπαν  $U$ .

$$S = \{A \in U : A \notin A\}$$

- Αν  $S \in S$ , τότε  $S \notin S$ .
- Αν  $S \notin S$ , τότε  $S \notin U$  ή  $S \in S$ . Άρα  $S \notin S$ .