Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης

3η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων, Σχέδιο Λύσεων

Θέμα 1 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από n^2+1 διαφορετικούς ακεραίους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από n^2+1 διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων της μορφής (a_k, k), $k \in \{1, \ldots, n^2+1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ *και* $k \leq \ell$ (όπου $\leq$ η συνήθης διάταξη των αριθμών).

1. Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
2. Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R);
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n+1$.

Λύση. (1) Η σχέση R είναι *ανακλαστική* γιατί για κάθε $k \in \{1, \ldots, n^2+1\}$, $a_k \leq a_k$ και $k \leq k$, άρα $((a_k, k), (a_k, k)) \in R$. Η σχέση R είναι *μεταβατική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)), ((a_\ell, \ell), (a_j, j)) \in R$, έχουμε ότι $a_k \leq a_\ell \leq a_j$ και ότι $k \leq \ell \leq j$, και συνεπώς $((a_k, k), (a_j, j)) \in R$. Η σχέση R είναι *αντισυμμετρική* γιατί για κάθε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ με $k \neq \ell$, έχουμε ότι $((a_\ell, \ell), (a_k, k)) \notin R$, γιατί $\ell > k$. Άρα η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης.
(2) Κάθε αλυσίδα μήκους m της R αντιστοιχεί σε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Πράγματι, τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \ldots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αλυσίδα μήκους m της R ανν (λόγω του ορισμού της R) $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \cdots \leq a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$ αποτελεί μια αύξουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$.

Κάθε αντιαλυσίδα μεγέθους m της R αντιστοιχεί σε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$, και αντίστροφα. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι αν τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \ldots, (a_{k_m}, k_m)$ αποτελούν μια αντιαλυσίδα της R, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ (δηλ. απαριθμούμε τα στοιχεία της αντιαλυσίδας σε αύξουσα σειρά των δεικτών τους). Επομένως τα $(a_{k_1}, k_1), (a_{k_2}, k_2), \ldots, (a_{k_m}, k_m)$, $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$, αποτελούν μια αντιαλυσίδα μεγέθους m της R ανν $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m$ και (λόγω του ορισμού της R) $a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_m}$ ανν η ακολουθία $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$ αποτελεί μια φθίνουσα υπακολουθία μήκους m της $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$.
(3) Αποτελεί άμεση συνέπεια του (2) και του ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R) είτε περιέχει μια αλυσίδα μήκους n είτε περιέχει μια αντιαλυσίδα μεγέθους n. □

Θέμα 2 (Αρχή Περιστερώνα). (α) Να δείξετε ότι ανάμεσα σε $n+2$ αυθαίρετα επιλεγμένους ακεραίους, είτε υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το $2n$ είτε υπάρχουν δύο που το άθροισμά τους διαιρείται από το $2n$.
(β) Έστω n αυθαίρετα επιλεγμένοι ακέραιοι $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Να δείξετε ότι υπάρχουν φυσικοί ℓ, k, $1 \leq \ell \leq n$, $0 \leq k \leq n - \ell$, τέτοιοι ώστε το άθροισμα $a_\ell + a_{\ell+1} + \cdots + a_{\ell+k}$ να διαιρείται από το n.

Λύση. (α) Ως "φωλιές" θεωρούμε τα $n+1$ ζεύγη φυσικών $\{i, 2n-i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, και ως "περιστέρια" τους $n+2$ ακεραίους στους οποίους αναφέρεται η εκφώνηση. Κάθε "περιστέρι" x ανατίθεται στη "φωλιά" $\{i, 2n-i\}$ ανν είτε $x \mod 2n = i$ είτε $x \mod 2n = 2n - i$. Λόγω της αρχής του περιστερώνα, θα υπάρχει μία "φωλιά" i που δέχεται δύο (τουλάχιστον) "περιστέρια" x, y. Για απλότητα και χβτγ, θεωρούμε ότι $x \geq y$ και ότι $x \mod 2n = i$. Αν $y \mod 2n = i$, τότε το $x - y$ διαιρείται από το $2n$. Αν $y \mod 2n = 2n - i$, τότε το $x + y$ διαιρείται από το $2n$.

(β) Ως "φωλιές" θεωρούμε τους n φυσικούς αριθμούς $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Ως "περιστέρια" θεωρούμε τα n μερικά αθροίσματα $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, $k = 1, \ldots, n$. Κάθε "περιστέρι" S_k ανατίθεται στη "φωλιά" i ανν $S_k \mod n = i$. Αν υπάρχει "περιστέρι" στη "φωλιά" 0, τότε το αντίστοιχο μερικό άθροισμα διαιρείται από το n. Διαφορετικά η "φωλιά" 0 μένει κενή, και λόγω της αρχής του περιστερώνα, θα υπάρχει μια "φωλιά" i, $i = 1, \ldots, n-1$, που δέχεται τουλάχιστον δύο "περιστέρια" S_k και S_m. Έστω ότι $k < m$. Παρατηρούμε ότι η διαφορά $S_m - S_k = a_{k+1} + \cdots + a_m$ διαιρείται από το n. $\square$