



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών
Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτιάκης
3η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων

Θέμα 1 (Αλυσίδες και Αντιαλυσίδες). Έστω $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ μια ακολουθία από $n^2 + 1$ διαφορετικούς ακέραιους. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από $n^2 + 1$ διατεταγμένα ζεύγη ακεραίων της μορφής (a_k, k) , $k \in \{1, \dots, n^2 + 1\}$, και ορίζουμε μια διμελή σχέση R στο A τέτοια ώστε $((a_k, k), (a_\ell, \ell)) \in R$ αν και μόνο αν $a_k \leq a_\ell$ και $k \leq \ell$ (όπου \leq η συνήθης διάταξη των αριθμών).

1. Να δείξετε ότι η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.
2. Ποια είναι η σημασία μιας αλυσίδας και μιας αντιαλυσίδας στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (A, R) ;
3. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ περιέχει είτε μία αύξουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$ είτε μία φθίνουσα υπακολουθία μήκους $n + 1$.

Θέμα 2 (Αρχή Περιστερώνα).

(α) Να δείξετε ότι ανάμεσα σε $n + 2$ αυθαίρετα επιλεγμένους ακέραιους, είτε υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το $2n$ είτε υπάρχουν δύο που το άθροισμά τους διαιρείται από το $2n$.

(β) Έστω n αυθαίρετα επιλεγμένοι ακέραιοι a_1, a_2, \dots, a_n . Να δείξετε ότι υπάρχουν φυσικοί ℓ, k , $1 \leq \ell \leq n$, $0 \leq k \leq n - \ell$, τέτοιοι ώστε το άθροισμα $a_\ell + a_{\ell+1} + \dots + a_{\ell+k}$ να διαιρείται από το n .