Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης

2η Σειρά Προτεινόμενων Ασκήσεων

Θέμα 1 (Κατηγορηματική Λογική). (α) Έστω $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, και έστω $\mathcal{P}(S_n)$ το δυναμοσύνολο του S_n. Για κάθε φυσικό m, $0 \leq m \leq n$, συμβολίζουμε με E_m το υποσύνολο του $\mathcal{P}(S_n)$ που αποτελείται από τα υποσύνολα του S_n με πληθικό αριθμό m. Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q, την οποία ερμηνεύουμε στο $\mathcal{P}(S_n)$ με το $Q(x, y)$ να αληθεύει ανν $x \subseteq y$ (δεν υπάρχει στη γλώσσα μας άλλο κατηγορηματικό σύμβολο, συναρτησιακό σύμβολο, ή σύμβολο σταθεράς). Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

1. Τύπο $\varphi_1(x)$ που αληθεύει ανν $x \notin E_0$.
2. Τύπο $\varphi_2(x)$ που αληθεύει ανν $x \in E_{n-1}$.
3. Τύπο $\varphi_3(x)$ που αληθεύει ανν το x έχει τουλάχιστον 2 γνήσια υποσύνολα στο $\mathcal{P}(S_n)$.
4. Τύπο $\varphi_4(x)$ που αληθεύει ανν το x έχει (ακριβώς) 2 υποσύνολα στο $\mathcal{P}(S_n)$.
5. Τύπο $\varphi_5(x, y)$ που αληθεύει ανν τα x και y αποτελούν μια διαμέριση του S_n.
6. Τύπο $\varphi_6(x, y, z)$ που αληθεύει ανν το σύνολο x αποτελεί την ένωση των συνόλων y και z.
7. Πρόταση που δηλώνει την ύπαρξη μοναδικού συνόλου που είναι υπερσύνολο όλων των συνόλων στο $\mathcal{P}(S_n)$.

Θέμα 2 (Κατηγορηματική Λογική). (α) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ:

$$\varphi \equiv \forall x(Q(x) \vee P(x)) \to (\exists x Q(x) \vee \forall x P(x))$$
$$\psi \equiv (\exists x Q(x) \vee \forall x P(x)) \to \forall x(Q(x) \vee P(x)),$$

όπου $Q(x)$ και $P(x)$ μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα. Να εξετάσετε τις προτάσεις φ και ψ ως προς την λογική τους εγκυρότητα. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τους ισχυρισμούς σας.

(β) Έστω $\psi(x)$ τύπος με μία ελεύθερη μεταβλητή x, και φ πρόταση. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη:

$$(\exists x \psi(x) \to \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi(x) \to \varphi)$$

Θέμα 3 (Μαθηματική Επαγωγή). (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$,

$$1^2 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

(β) Σε πόσες (μη επικαλυπτόμενες) περιοχές χωρίζουν το επίπεδο n ευθείες που ανά δύο δεν είναι παράλληλες και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας με μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των ευθειών n.

Θέμα 4 (Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε n φίλους που ο καθένας ξέρει ένα διαφορετικό μυστικό και επικοινωνούν μεταξύ τους τηλεφωνικά ανά δύο. Κάθε φορά που δύο φίλοι μιλούν στο τηλέφωνο, ανταλλάσσουν όλα τα μυστικά που γνωρίζουν εκείνη τη στιγμή. Συμβολίζουμε με $A(n)$ τον ελάχιστο αριθμό τηλεφωνημάτων που απαιτούνται για να μάθουν όλοι οι φίλοι όλα τα μυστικά.

1. Να υπολογίσετε τα $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, και $A(5)$. Να περιγράψετε τις αντίστοιχες ακολουθίες τηλεφωνημάτων.
2. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 4$, $A(n) \leq 2n - 4$.

Θέμα 5 (Κατηγορηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))] \to \exists y \forall x P(y,x)$$

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ.
2. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ.