# Συνδυαστική Απαρίθμηση

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

# Συνδυαστική Απαρίθμηση

- Υπολογισμός (με συνδυαστικά επιχειρήματα) του πλήθους των διαφορετικών αποτελεσμάτων ενός «πειράματος».
  - «Πείραμα»: διαδικασία με συγκεκριμένο (πεπερασμένο) σύνολο παρατηρήσιμων αποτελεσμάτων.
    - Π.χ. ρίψη ζαριών, μοίρασμα τράπουλας, ανάθεση γραφείων, επιλογή password, 6άδες Lotto, …
  - Πληθάριθμος δυναμοσυνόλου: αν $|A| = n$, τότε $|P(A)| = 2^n$
- Βασικές αρχές και έννοιες:
  - Κανόνες γινομένου και αθροίσματος, αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού.
  - Διατάξεις και μεταθέσεις (με ή χωρίς) επανάληψη.
  - Συνδυασμοί (με ή χωρίς) επανάληψη.

# Κανόνας Γινομένου

- Πείραμα A με n αποτελέσματα. Πείραμα B με m αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα A και B είναι **ανεξάρτητα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων A **και** B έχει n×m αποτελέσματα.
  - Ανεξάρτητα: το αποτέλεσμα του A δεν επηρεάζει (ως προς τον αριθμό των αποτελεσμάτων) το αποτέλεσμα του B, και αντίστροφα.
    - Π.χ. |A×B| = |A|×|B|
  - Επιλογή ενός ψηφίου 0-9 και ενός κεφαλαίου Ελληνικού γράμματος:
    - 10×24 = 240 διαφορετικά αποτελέσματα.
  - #συμβ/ρών (με κεφαλαία Ελληνικά) μήκους 10: $24^{10}$
  - #παλινδρομικών συμβ/ρών μήκους 10: $24^5$
  - #πινακίδων αυτοκινήτων: $24^3 \times 9 \times 10^3 = 124.416.000$
  - #συναρτήσεων από A στο B (|A| = n, |B| = m): $m^n$
  - #συναρτήσεων **1-1** από A στο B (m ≥ n): $m(m-1)\cdots(m-n+1)$

# Κανόνας Αθροίσματος

- Πείραμα A με n αποτελέσματα. Πείραμα B με m αποτελέσματα.
- Αν αποτελέσματα A και B είναι **αμοιβαία αποκλειόμενα**, τότε συνδυασμός των πειραμάτων A **ή** B έχει n+m αποτελέσματα.
  - Αμοιβαία αποκλειόμενα: η παρατήρηση αποτελέσματος του A αποκλείει την παρατήρηση αποτελέσματος του B, και αντίστροφα.
  - $|A \cup B| = |A| + |B|$, αν $|A \cap B| = \emptyset$
  - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία.
  - Τρόποι να διαλέξουμε 2 βιβλία σε διαφορετική γλώσσα:
    - Ελλ. – Αγγλ.: $5 \times 7 = 35$
    - Ελλ. – Γερμ.: $5 \times 10 = 50$
    - Αγγλ. – Γερμ.: $7 \times 10 = 70$
  - Αμοιβαία αποκλειόμενα. Σύνολο: 155 διαφορετικές επιλογές.
  - Τρόποι να διαλέξουμε 2 βιβλία: $\frac{22 \times 21}{2} = 231$

# Παραδείγματα

- #διμελών σχέσεων στο σύνολο Α, |Α| = n:
  - Όλες: $2^{n^2}$
  - Ανακλαστικές: $2^{n(n-1)}$
  - Συμμετρικές: $2^{n(n+1)/2}$
  - Αντισυμμετρικές: $2^n \times 3^{n(n-1)/2}$

# Παραδείγματα

- #passwords με 6 – 8 χαρακτήρες αποτελούμενα από κεφαλαία (Αγγλικά) γράμματα και (τουλάχιστον ένα) δεκαδικό ψηφίο.
  - #passwords μήκους k = $36^k - 26^k$
  - #passwords = $(36^6+36^7+36^8) - (26^6+26^7+26^8)$
- #passwords μήκους 2 από A, B, C, D και 0, 1, 2 με τουλάχιστον ένα ψηφίο.
  - Σωστό το $7^2 - 4^2 = 33$. **Λάθος** το (γιατί;) $2 \times 3 \times 7 = 42$!
- #δυαδικών συμβ/ρών μήκους 8 που είτε αρχίζουν από 1 είτε τελειώνουν σε 00:
  - Όχι αμοιβαία αποκλειόμενα: $2^7 + 2^6 - 2^5 = 160$.

# Διατάξεις – Μεταθέσεις

- **Διατάξεις** P(n, k): k από n διακεκριμένα αντικείμενα σε k διακεκριμένες θέσεις (1 αντικείμενο σε κάθε θέση).
  - P(n, k) = #τρόπων να πληρωθούν k διακεκριμένες θέσεις από n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε ένα «αντίγραφο»).
    $$P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
  - #τρόπων να πληρώσουμε 4 (διαφορετικές) θέσεις εργασίας αν έχουμε 30 υποψήφιους: $P(30,4) = 30!/26!$
  - #συμβ/ρών μήκους 10 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες: $P(24,10) = 24!/14!$
- **Μεταθέσεις** n αντικειμένων: P(n, n) = n!
  - #αναθέσεων 10 (διαφορετικών) γραφείων σε 10 καθηγητές: $P(10,10) = 10!$
  - #συμβ/ρών μήκους 24 με όλα τα σύμβολα διαφορετικά από κεφαλαίους Ελληνικούς χαρακτήρες: $P(24,24) = 24!$

# Παραδείγματα

- #συμβ/ρών από 4 διαφορετικούς χαρακτήρες ακολουθούμενους από 3 διαφορετικά ψηφία:
  - $P(24, 4) \times P(10, 3)$
- #τετραψήφιων δεκαδικών αριθμών που δεν αρχίζουν από 0:
  - $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$.
- #τετραψήφιων δεκαδικών αριθμών που δεν αρχίζουν από 0 και δεν έχουν επαναλάμβανόμενα ψηφία:
  - $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$.
- #μεταθέσεων (κεφαλαίων Ελληνικών) όπου Α εμφανίζεται πριν το Β και Γ:
  - $P(24, 21) \times 2!$
- #μεταθέσεων όπου Α εμφανίζεται πριν το Β, και μετά τα Γ και Δ:
  - $P(24, 20) \times 2!$

# Μεταθέσεις με Ομάδες

- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέξης ΕΦΗΒΙΚΟΣ: 8!
- #συμβ/ρών (μήκους 8) με γράμματα λέξης ΠΑΡΑΠΟΝΑ:
  - Μεταθέσεις με ομάδες ίδιων αντικειμένων: 8!/(2!3!1!1!1!)
- Μεταθέσεις n αντικειμένων σε k ομάδες ίδιων αντικειμένων με πληθάριθμο $n_1$, $n_2$, …, $n_k$ αντίστοιχα:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

- #συμβ/ρών μήκους 24 από 7 Α, 8 Β, 5 Γ, και 4 Δ: 24!/(7!8!5!4!)
  - Αν πρώτο και τελευταίο Α: $22!/(5!8!5!4!)$
  - Αν δεν πρέπει να εμφανίζεται ΔΔΔΔ: $24!/(7!8!5!4!) - 21!/(7!8!5!1!)$
- Αριθμός (n!)! διαιρείται ακριβώς από το $(n!)^{(n-1)!}$
  - Πηλίκο = #μεταθέσεων n! αντικειμένων σε (n-1)! ομάδες με n ίδια αντικείμενα καθεμία.

# Διατάξεις με Επανάληψη

- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών: $10^5$
- Διατάξεις με **επανάληψη**: n διακεκριμένα αντικείμενα (διαθέσιμα σε απεριόριστα «αντίγραφα») σε k διακεκριμένες θέσεις: $n^k$
  - Διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό στη χωρητικότητα), όταν η σειρά στις υποδοχές δεν έχει σημασία.
- #πενταψήφιων δεκαδικών αριθμών με τουλ. ένα 8: $10^5 - 9^5$
- Πληθικός αριθμός δυναμοσυνόλου A: $2^{|A|}$
  - |A| στοιχεία σε 2 υποδοχές (ανήκει – δεν ανήκει στο υποσύνολο).
- #δυαδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος από 1: $2^{n-1}$
  - $\forall$ συμβ/ρά μήκους n–1, $\exists$ μοναδική συμ/ρά με άρτιο πλήθος 1.
  - Ιδέα του parity bit.

# Διατάξεις με Επανάληψη

- #πενταδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο πλήθος από 1:
  - #πενταδικών συμβ/ρών χωρίς 0 και 1 (άρτιο πλήθος 1): $3^n$
  - Από τις υπόλοιπες $5^n - 3^n$, οι μισές περιέχουν άρτιο πλήθος 1.
    - Καθεμία περιέχει μια υπακολουθία με 0 και 1.
    - Από προηγούμενο, οι μισές υπακολουθίες έχουν άρτιο πλήθος 1.
  - Τελικά: $3^n + (5^n - 3^n)/2 = (5^n + 3^n)/2$
- #εβδομαδιαίων προγραμμάτων μελέτης για μαθήματα Μ, Φ, Χ, Ο ώστε κάθε μάθημα τουλάχιστον 1 ημέρα.
  - Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $4^7 - |\overline{\mathbf{M}} \cup \overline{\mathbf{\Phi}} \cup \overline{\mathbf{X}} \cup \overline{\mathbf{O}}|$
    - #προγραμμάτων χωρίς 1 μάθημα: $3^7$ (4 περιπτώσεις).
    - #προγραμμάτων χωρίς 2 μαθήματα: $2^7$ (6 περιπτώσεις).
    - #προγραμμάτων χωρίς 3 μαθήματα: $1^7 = 1$ (4 περιπτώσεις)
    - #προγραμμάτων χωρίς 4 μαθήματα: 0
  - Τελικά: $4^7 - 4\times3^7 + 6\times2^7 - 4 = 8400$

# Διατάξεις με Επανάληψη

- Διανομή k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές (χωρίς περιορισμό χωρητικότητας) με σειρά στις υποδοχές να έχει σημασία.
  - Ιστιοφόρο έχει n κατάρτια στα οποία μπορεί να αναρτηθούν k διαφορετικές σημαίες. Πόσα διαφορετικά σήματα;

$$n(n+1)\cdots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

- Κυκλικές μεταθέσεις n ατόμων: (n – 1)!
  - #τρόπων που n άνθρωποι κάθονται σε κυκλικό τραπέζι (διακρίνουμε μεταξύ δεξιά και αριστερά).