Ασυμπτωτική Εκτίμηση και Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ασυμπτωτική Εκτίμηση

- Για την ανάλυση χρόνου εκτέλεσης ενός αλγόριθμου, συνήθως αγνοούμε **σταθερές** και εστιάζουμε σε **τάξη μεγέθους** χρόνου εκτέλεσης ως συνάρτηση του **μεγέθους της εισόδου** (συμβολίζεται με n).
- Σταθερές εξαρτώνται από υπολογιστή, υλοποίηση, κλπ.
  Παράδειγμα αλγόριθμος max με $3n-1$ λειτουργίες.
  Υπολογιστής με 10 λειτ/msec, χρόνος $\frac{3}{10}n - \frac{1}{10}$ msecs.
  Υπολογιστής με 100 λειτ/msec, χρόνος $\frac{3}{100}n - \frac{1}{100}$ msecs.
- Τάξη μεγέθους είναι **εγγενής ιδιότητα** του αλγόριθμου.
  max έχει **γραμμικό χρόνο** σε **όλους** τους υπολογιστές.
- Εστιάζουμε σε (πολύ) **μεγάλα στιγμιότυπα**.
  Καλύτερος αλγόριθμος $\Leftrightarrow$ χ.ε. **μικρότερης τάξης μεγέθους**.

Ασυμπτωτική Εκτίμηση

- **Τάξη μεγέθους** δεν εξαρτάται από **σταθερές**!
  δεν καθορίζεται από **όρους μικρότερης τάξης**!
- Αγνοούμε **εντελώς** κάθε **σταθερά** και **όρο μικρότερης τάξης**.
  Κρατάμε μόνο τον **κυρίαρχο όρο**.
  - $10^2 n + 10^5$ είναι **γραμμικό**, δηλ. έχει *τάξη μεγέθους* n.
  - $10^5 n^2 + 10^8 n$ είναι **τετραγωνικό**, δηλ. έχει *τάξη μεγέθους* n^2.
- "Ταξινόμηση" συναρτήσεων σε **αύξουσα** σειρά τάξης μεγέθους:
  - **Σταθερή** $\sim 1 \leq$ **λογαριθμική** $\sim \log n \leq$ **γραμμική** $\sim n \leq \sim n\log n$
    $\leq$ **τετραγωνική** $\sim n^2 \leq$ **κυβική** $\sim n^3 \leq$ **εκθετική** με βάση $2 \sim 2^n$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

- ...εκφράζει **αποτελέσματα** ασυμπτωτικής εκτίμησης.
- $\Theta(\cdot)$ δηλώνει **ακριβή εκτίμηση** της τάξης μεγέθους.
  $f(n) = \Theta(g(n))$ ανν υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 και n_0:

$$\forall n \geq n_0\,, \quad c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$$

  $an^2 + bn + c = \Theta(n^2)$, $500n^2 + 100n^3 + 10^{-5}n^3\log n = \Theta(n^3 \log n)$.
- $\mathrm{O}(\cdot)$ δηλώνει **άνω φράγμα** στην τάξη μεγέθους.
  $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ ανν υπάρχουν θετικές σταθερές c και n_0:

$$\forall n \geq n_0\,, \quad f(n) \leq c\, g(n)$$

  $100n^3 + 10^{-5}n^3\log n = \mathrm{O}(n^3\log n) = \mathrm{O}(n^4)$ αλλά $10^{-10}n^2 \neq \mathrm{O}(n)$.
- $\Omega(\cdot)$ δηλώνει **κάτω φράγμα** στην τάξη μεγέθους.
  $f(n) = \Omega(g(n))$ ανν υπάρχουν θετικές σταθερές c και n_0:

$$\forall n \geq n_0\,, \quad f(n) \geq c\, g(n)$$

  $10^{-5}n^3\log n = \Omega(n^3\log n) = \Omega(n^3)$ αλλά $10^{10}n \neq \Omega(n^2)$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$.
- $\mathrm{o}(\cdot)$ δηλώνει **άνω φράγμα** που δεν είναι ακριβές.
  $f(n) = \mathrm{o}(g(n))$ ανν για κάθε σταθερά $c > 0$, υπάρχει σταθερά n_0:

  $$\forall n \geq n_0\,,\quad f(n) < c\,g(n) \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

  $5n^3 \log n = \mathrm{o}(n^4)$ αλλά $10n^2 \neq \mathrm{o}(n^2)$.
- $\omega(\cdot)$ δηλώνει **κάτω φράγμα** που δεν είναι ακριβές.
  $f(n) = \omega(g(n))$ ανν για κάθε σταθερά $c > 0$, υπάρχει σταθερά n_0:

  $$\forall n \geq n_0\,,\quad f(n) > c\,g(n) \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

  $5n^3 \log n = \omega(n^3)$ αλλά $10n^2 \neq \omega(n^2)$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

- $f(n) = \Theta(g(n)) \sim$ ασυμπτωτικά $f(n) = g(n)$
  $f(n) = \mathrm{O}(g(n)) \sim$ ασυμπτωτικά $f(n) \leq g(n)$
  $f(n) = \Omega(g(n)) \sim$ ασυμπτωτικά $f(n) \geq g(n)$
  $f(n) = \mathrm{o}(g(n)) \sim$ ασυμπτωτικά $f(n) < g(n)$
  $f(n) = \omega(g(n)) \sim$ ασυμπτωτικά $f(n) > g(n)$.
- Κρατάμε μόνο τον **κυρίαρχο όρο**.
- Πολυώνυμο βαθμού d: $a_d n^d + a_{d-1} n^{d-1} + a_1 n + a_0 = \Theta(n^d)$.
- $\sum_{i=1}^n i = \Theta(n^2)$, $\sum_{i=1}^n i^2 = \Theta(n^3)$, $\ldots$ $\sum_{i=1}^n i^k = \Theta(n^{k+1})$.
- $\sum_{i=1}^n 1/i = \Theta(\log n)$, $\sum_{i=1}^n 2^i = \Theta(2^n)$, $\log(n!) = \Theta(n \log n)$.

Ασκήσεις

Αληθείς ή **ψευδείς** και γιατί;

1. $10f(n) + 10^{10} = \mathrm{O}(f(n))$. **Α**
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$. **Ψ**
3. $f(n) + g(n) = \Omega(\min\{f(n), g(n)\})$. **Α**
4. $f(n) + g(n) = \mathrm{O}(\max\{f(n), g(n)\})$. **Α**

Ασκήσεις

Να τοποθετηθούν οι συναρτήσεις σε **αύξουσα σειρά** τάξης μεγέθους:

2^{5n}	$\log^4 n$	$(\log n)^{100} \log\log n$	$n \log\log n$	$n^{0.1} \log\log n$
2^n	$n^{0.6}$	$2^n + n^{2^{100}}$	$n^{1/\log n}$	$\log(n!)$
$n^{\log n}$	$\log\log n$	$2^{\log^3 n}$	$\frac{n}{\log_n 2} + n$	$(\log n)^{\log n}$

Πότε $f(n)$ **είναι** $\oplus(g(n))$ και πότε **δεν είναι** ($\oplus \in \{\Theta, \mathrm{O}, \Omega, \mathrm{o}, \omega\}$);

$f(n)$	$g(n)$	$\Theta(g(n))$	$\mathrm{O}(g(n))$	$\mathrm{o}(g(n))$	$\Omega(g(n))$	$\omega(g(n))$
2^{n+5}	$2^n + 2^5 + n^{100}$					
$n^4 - n^3$	$16^{\log n}$					
5^{4n}	10^{2n}					
$n^{1/\log\log n}$	$n^{0.001}$					
$n!$	n^n					
$n^{\log^{20} n}$	2^n					