Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Email: fotakis@cs.ntua.gr

1 Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Στην ανάλυση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας ενός αλγόριθμου, η *ασυμπτωτική εκτίμηση* αγνοεί τις σταθερές και εξετάζει μόνο την τάξη μεγέθους του χρόνου εκτέλεσης, της μνήμης, κλπ., που απαιτούνται (συνήθως στη χειρότερη περίπτωση) για την επίλυση ενός στιγμιότυπου συγκεκριμένου μεγέθους. Ο *ασυμπτωτικός συμβολισμός* χρησιμοποιείται (μεταξύ άλλων) για να εκφραστούν τα αποτελέσματα της ασυμπτωτικής εκτίμησης.

Για διευκόλυνση, ορίζουμε τις διάφορες μορφές ασυμπτωτικού συμβολισμού μόνο για ακολουθίες, δηλαφή συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Οι ορισμοί μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε πραγματικές συναρτήσεις. Σε όλους τους ορισμούς υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες είναι θετικές (δηλ. παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}_+^*$).

Συμβολισμός Θ. Το Θ χρησιμοποιείται για τον *ακριβή προσδιορισμό* της τάξης μεγέθους μίας συνάρτησης. Συγκεκριμένα, για κάθε συνάρτηση $g(n)$, η κλάση συναρτήσεων $\Theta(g(n))$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις με την ίδια τάξη μεγέθους. Τυπικά, δεδομένης μιας συνάρτησης $g(n)$, συμβολίζουμε με $\Theta(g(n))$ το σύνολο συναρτήσεων

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+ \mid (\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*)\, (\exists n_0 \in \mathbb{N})\, (\forall n \geq n_0)\; c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)\}$$

Με άλλα λόγια, μια συνάρτηση $f(n)$ ανήκει στην κλάση συναρτήσεων $\Theta(g(n))$ αν υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε το $f(n)$ να είναι μεταξύ $c_1\, g(n)$ και $c_2\, g(n)$ για όλες τις τιμές του n που ξεπερνούν ένα κατώφλι n_0 (διαισθητικά, για όλες τις *μεγάλες* τιμές του n).

Ο συμβολισμός $\Theta(g(n))$ δηλώνει κλάση συναρτήσεων. Μολαταύτα, γράφουμε $f(n) = \Theta(g(n))$ (και όχι $f(n) \in \Theta(g(n))$) για να δηλώσουμε ότι η $f(n)$ ανήκει στην κλάση συναρτήσεων $\Theta(g(n))$. Το ίδιο συμβαίνει και με όλες τις μορφές ασυμπτωτικού συμβολισμού.

Εξ' ορισμού ο ασυμπτωτικός συμβολισμός αγνοεί τις σταθερές. Επιπλέον, ο ασυμπτωτικός συμβολισμός προσδιορίζει την τάξη μεγέθους των συναρτήσεων και αγνοεί όρους μικρότερης τάξης μεγέθους. Καθώς το n τείνει στο άπειρο, οι όροι μικρότερης τάξης μεγέθους καθίστανται αμελητέοι σε σχέση με τον κυρίαρχο όρο.

Για παράδειγμα, για κάθε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $f(n) = an^2 + bn + c$, $a > 0$, ισχύει ότι $f(n) = \Theta(n^2)$. Πράγματι, καθώς το n τείνει στο άπειρο, ο κυρίαρχος όρος n^2 καθορίζει τη συμπεριφορά της συνάρτησης $f(n)$. Γενικότερα, κάθε πολυώνυμο βαθμού d ανήκει στην κλάση $\Theta(n^d)$. Ομοίως, είναι $106n^2 + 104n^3 + 10^{-2}n^3 \log n = \Theta(n^3 \log n)$, αφού το $n^3 \log n$ είναι ο κυρίαρχος όρος. Ακόμη, κάθε σταθερή συνάρτηση ανήκει στην κλάση $\Theta(1)$, αφού το σημαντικό είναι ότι η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή για κάθε n και όχι ποια ακριβώς είναι αυτή η τιμή.

Συμβολισμός O. Δεδομένης μιας συνάρτησης $g(n)$, συμβολίζουμε με $\mathrm{O}(g(n))$ το σύνολο των συναρτήσεων

$$\mathrm{O}(g(n)) = \{f(n) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+ \mid (\exists c \in \mathbb{R}_+^*)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\ f(n) \leq c\,g(n)\}$$

Με άλλα λόγια, μια συνάρτηση $f(n)$ ανήκει στην κλάση συναρτήσεων $\mathrm{O}(g(n))$ αν υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε το $f(n)$ να μην ξεπερνά το $c\,g(n)$ για όλες τις μεγάλες τιμές του n.

Ο συμβολισμός O δίνει ένα ένα ασυμπωτικό άνω φράγμα στην τάξη μεγέθους μιας συνάρτησης. Όπως και για το συμβολισμό Θ, γράφουμε $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ αν και το $\mathrm{O}(g(n))$ ορίζει κλάση συναρτήσεων.

Συγκρίνοντας τους ορισμούς των συμβολισμών Θ και O, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε συνάρτηση $f(n)$ που ανήκει στο $\Theta(g(n))$, ανήκει και στο $\mathrm{O}(g(n))$. Δηλαδή, $\Theta(g(n)) \subseteq \mathrm{O}(g(n))$.

Συμβολισμός Ω. Δεδομένης μιας συνάρτησης $g(n)$, συμβολίζουμε με $\Omega(g(n))$ το σύνολο των συναρτήσεων

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+ \mid (\exists c \in \mathbb{R}_+^*)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\ c\,g(n) \leq f(n)\}$$

Με άλλα λόγια, μια συνάρτηση $f(n)$ ανήκει στην κλάση συναρτήσεων $\mathrm{O}(g(n))$ αν υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε το $f(n)$ να μην υπολείπεται του $c\,g(n)$ για όλες τις μεγάλες τιμές του n.

Ο συμβολισμός Ω δίνει ένα ένα ασυμπωτικό κάτω φράγμα στην τάξη μεγέθους μιας συνάρτησης. Συγκρίνοντας τους ορισμούς των συμβολισμών Θ, O, και Ω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$ είναι $f(n) = \Theta(g(n))$ αν και μόνο αν $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$. Για παράδειγμα, όταν $f(n) = \Theta(n^2)$, ισχύει επίσης ότι $f(n) = \mathrm{O}(n^2)$ και $f(n) = \Omega(n^2)$. Αντίστροφα, όταν $g(n) = \mathrm{O}(n^3)$ και $g(n) = \Omega(n^3)$, ισχύει ότι $g(n) = \Theta(n^3)$.

Συμβολισμός o. Το ασυμπτωτικό άνω φράγμα του συμβολισμού O δεν είναι πάντα ακριβές (tight), δηλ. δεν είναι πάντα το καλύτερο δυνατό. Για παράδειγμα, το φράγμα $2n^2 = \mathrm{O}(n^2)$ είναι ακριβές, ενώ το φράγμα $2n^2 = \mathrm{O}(n^3)$ δεν είναι. Ο συμβολισμός o δηλώνει ένα άνω φράγμα το οποίο δεν είναι ακριβές.

Δεδομένης μιας συνάρτησης $g(n)$, συμβολίζουμε με $\mathrm{o}(g(n))$ το σύνολο των συναρτήσεων

$$\mathrm{o}(g(n)) = \{f(n) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+ \mid (\forall c \in \mathbb{R}_+^*)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\ f(n) < c\,g(n)\}\}$$

Ο ορισμός του o απαιτεί για *κάθε* θετική σταθερά c, το $f(n)$ να είναι μικρότερο του $c\,g(n)$ για όλες τις μεγάλες τιμές του n. Μια ισοδύναμη μαθηματική διατύπωση είναι ότι $f(n) = \mathrm{o}(g(n))$ αν $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. Επομένως, $2n^2 = \mathrm{o}(n^3)$, αλλά $2n^2 \neq \mathrm{o}(n^2)$.

Συμβολισμός ω. Παρόμοια με το o, ο συμβολισμός ω χρησιμοποιείται για ένα κάτω φράγμα που δεν είναι ακριβές. Δεδομένης μιας συνάρτησης $g(n)$, συμβολίζουμε με $\omega(g(n))$ το σύνολο των συναρτήσεων

$$\omega(g(n)) = \{f(n) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}_+ \mid (\forall c \in \mathbb{R}_+^*)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\ c\,g(n) < f(n)\}$$

Ο ορισμός του ω απαιτεί για *κάθε* θετική σταθερά c, το $f(n)$ να είναι μεγαλύτερο του $c\,g(n)$ για όλες τις μεγάλες τιμές του n. Μια ισοδύναμη μαθηματική διατύπωση είναι ότι $f(n) = \omega(g(n))$ αν $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$. Επομένως, $2n^2 = \omega(n)$, αλλά $2n^2 \neq \omega(n^2)$.

Άσκηση 1. Έστω $f(n)$ και $g(n)$ θετικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις είτε να αποδείξετε ότι είναι αληθής είτε να εξηγήσετε γιατί είναι ψευδής:

1. $10f(n) + 10^{10} = \mathrm{O}(f(n))$.
2. $f(n) + g(n) = \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$.
3. $f(n) + g(n) = \Omega(\min\{f(n), g(n)\})$.
4. $f(n) + g(n) = \mathrm{O}(\max\{f(n), g(n)\})$.
5. Αν $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ και $f(n), g(n) > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\log f(n) = \mathrm{O}(\log g(n))$.
6. Αν $f(n) = \Theta(g(n))$, τότε $2^{f(n)} = \Theta(2^{g(n)})$.
7. $f(n) = \Omega(f(n/2))$.

Λύση. Οι 1, 3, 4, και 7 είναι αληθείς και αποδεικνύονται με τους ορισμούς. Οι 2 και 6 είναι ψευδείς και μπορούν να βρεθούν αντιπαραδείγματα. Η 5 είναι ψευδής στη γενική περίπτωση, αλλά αληθεύει αν θεωρήσουμε μόνο αύξουσες συναρτήσεις. □

Άσκηση 2. Να τοποθετηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις σε αύξουσα σειρά τάξης μεγέθους:

$$\begin{array}{cccccc} 2^{5n} & \log^4 n & (\log n)^{100} \log\log n & n \log\log n & n^{0.1} \log\log n \\ 2^n & n^{0.6} & 2^n + n^{2^{100}} & n^{1/\log n} & \log(n!) \\ n^{\log n} & \log\log n & 2^{\log^3 n} & \frac{n}{\log_n 2} + n & (\log n)^{\log n} \end{array}$$

Λύση. Είναι

$$n^{1/\log n} = \Theta(1),\ \log\log n,\ \log^4 n,\ (\log n)^{100} \log\log n,\ n^{0.1} \log\log n,$$

$$n^{0.6},\ n \log\log n,\ \log(n!) = \Theta(n \log n),\ \frac{n}{\log_n 2} + n = \Theta(n \log n),$$

$$(\log n)^{\log n} = \Theta(n^{\log\log n}),\ n^{\log n},\ 2^{\log^3 n} = \Theta(n^{\log^2 n}),\ 2^n,\ 2^n + n^{2^{100}} = \Theta(2^n),\ 2^{5n}$$

Άσκηση 3. Στον πίνακα που ακολουθεί, σημειώστε σε ποιες περιπτώσεις η συνάρτηση $f(n)$ ανήκει στις κλάσεις $\Theta(g(n)), \mathrm{O}(g(n)), \mathrm{o}(g(n)), \Omega(g(n))$, και $\omega(g(n))$ και σε ποιες όχι.

$f(n)$	$g(n)$	$\Theta(g(n))$	$\mathrm{O}(g(n))$	$\mathrm{o}(g(n))$	$\Omega(g(n))$	$\omega(g(n))$
2^{n+5}	$2^n + 2^5 + n^{100}$					
$n^4 - n^3$	$16^{\log n}$					
5^{4n}	10^{2n}					
$n^{1/\log\log n}$	$n^{0.001}$					
$n!$	n^n					
$n^{\log^{20} n}$	2^n					

Λύση.

$f(n)$	$g(n)$	$\Theta(g(n))$	$\mathrm{O}(g(n))$	$\mathrm{o}(g(n))$	$\Omega(g(n))$	$\omega(g(n))$
2^{n+5}	$2^n + 2^5 + n^{100}$	ναι	ναι	όχι	ναι	όχι
$n^4 - n^3$	$16^{\log n}$	ναι	ναι	όχι	ναι	όχι
5^{4n}	10^{2n}	όχι	όχι	όχι	ναι	ναι
$n^{1/\log\log n}$	$n^{0.001}$	όχι	ναι	ναι	όχι	όχι
$n!$	n^n	όχι	ναι	ναι	όχι	όχι
$n^{\log^{20} n}$	2^n	όχι	ναι	ναι	όχι	όχι