Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτές Μέθοδοι για την Επιστήμη των Υπολογιστών

Διδάσκοντες: Καθ. Φ. Αφράτη, Λεκτ. Δ. Φωτάκης

1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 19/4/2010

Θέμα 1 (Προτασιακή Λογική, 2 μονάδες). (α) Σε ένα απομονωμένο νησί υπάρχουν μόνο δύο κοινωνικές τάξεις: οι ευγενείς, που λένε πάντα την αλήθεια, και οι ψευτοευγενείς, που λένε πάντα ψέματα. Δύο κάτοικοι του νησιού, ο X και ο Y δηλώνουν: ο X ότι "ο Y είναι ευγενής", και ο Y ότι "δεν ανήκω στην ίδια τάξη με τον X". Είναι κάποιος από τους X και Y ευγενής, και αν ναι, ποιος;

(β) Ένας εξερευνητής συλλαμβάνεται από μια φυλή κανιβάλων. Στη φυλή υπάρχουν δύο κατηγορίες κανιβάλων, αυτοί που λένε πάντα την αλήθεια και αυτοί που λένε πάντα ψέματα. Ο εξερευνητής θα μείνει ελεύθερος μόνο αν διαπιστώσει σε ποιά κατηγορία ανήκει ο φύλαρχος. Ο εξερευνητής μπορεί να κάνει μία μόνο ερώτηση στον φύλαρχο, την οποία αυτός θα απαντήσει με ένα "ναι" ή ένα "όχι". (i) Να εξηγήσετε γιατί η ερώτηση "Είσαι ειλικρινής;" δεν εξυπηρετεί τον σκοπό του εξερευνητή. (ii) Να βρείτε ερώτηση με την οποία ο εξερευνητής διαπιστώνει αν ο φύλαρχος είναι ειλικρινής.

(γ) Μια συγκεκριμένη χώρα κατοικείται μόνο από ανθρώπους που είτε λένε πάντα αλήθεια είτε λένε πάντα ψέματα, και απαντούν σε ερωτήσεις μόνο με ένα "ναι" ή ένα "όχι". Ένας τουρίστας φθάνει σε μια διακλάδωση του δρόμου, όπου το ένα παρακλάδι οδηγεί στην πρωτεύουσα και το άλλο όχι. Δεν υπάρχει πινακίδα που να υποδεικνύει ποιο παρακλάδι να ακολουθήσει, αλλά υπάρχει ένας κάτοικος, ο κύριος Z, ο οποίος στέκεται στη διακλάδωση. Ποια ερώτηση πρέπει να κάνει ο τουρίστας στον κύριο Z για να αποφασίσει ποιο παρακλάδι πρέπει να ακολουθήσει;

Θέμα 2 (Κατηγορηματική Λογική, 2.5 μονάδες). (α) Έστω $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, και έστω $\mathcal{P}(S_n)$ το δυναμοσύνολο του S_n. Για κάθε φυσικό m, $0 \leq m \leq n$, συμβολίζουμε με E_m το υποσύνολο του $\mathcal{P}(S_n)$ που αποτελείται από τα υποσύνολα του S_n με πληθικό αριθμό m. Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα με διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q, την οποία ερμηνεύουμε στο $\mathcal{P}(S_n)$ με το $Q(x, y)$ να αληθεύει ανν $x \subseteq y$ (δεν υπάρχει στη γλώσσα μας άλλο κατηγορηματικό σύμβολο, συναρτησιακό σύμβολο, ή σύμβολο σταθεράς). Σε αυτή την ερμηνεία, να διατυπώσετε:

1. Τύπο $\varphi_1(x)$ που αληθεύει ανν $x \notin E_0$.
2. Τύπο $\varphi_2(x)$ που αληθεύει ανν $x \in E_{n-1}$.
3. Τύπο $\varphi_3(x)$ που αληθεύει ανν το x έχει (ακριβώς) 2 υποσύνολα στο $\mathcal{P}(S_n)$.
4. Τύπο $\varphi_4(x, y)$ που αληθεύει ανν τα x και y αποτελούν μια διαμέριση του S_n.
5. Πρόταση που δηλώνει την ύπαρξη μοναδικού συνόλου που είναι υπερσύνολο όλων των συνόλων στο $\mathcal{P}(S_n)$.

(β) Δίνονται οι προτάσεις φ και ψ:

$$\varphi \equiv \forall x(Q(x) \vee P(x)) \to (\exists x Q(x) \vee \forall x P(x))$$
$$\psi \equiv (\exists x Q(x) \vee \forall x P(x)) \to \forall x(Q(x) \vee P(x))\,,$$

όπου $Q(x)$ και $P(x)$ μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα. Να εξετάσετε τις προτάσεις φ και ψ ως προς την λογική τους εγκυρότητα. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα τους ισχυρισμούς σας.

(γ) Έστω $\psi(x)$ τύπος με μία ελεύθερη μεταβλητή x, και φ πρόταση. Να δείξετε ότι η παρακάτω πρόταση είναι λογικά έγκυρη:

$$(\exists x \psi(x) \to \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi(x) \to \varphi)$$

Θέμα 3 (Σύνολα και Διαγωνιοποίηση, 3 μονάδες). (α) Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(A)$ το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή. Αν μια πρόταση είναι αληθής, να διατυπώσετε μια σύντομη απόδειξη, διαφορετικά ένα αντιπαράδειγμα.

1. $A \cup \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A)$
2. $A \cap \mathcal{P}(A) = A$
3. $\{A\} \cup \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A)$
4. $\{A\} \cap \mathcal{P}(A) = A$
5. $A - \mathcal{P}(A) = A$
6. $\mathcal{P}(A) - \{A\} = \mathcal{P}(A)$

(β) Έστω $\mathcal{S}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Είναι το $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(γ) Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο $\{0, 1, 2, 3\}$. Είναι το $\mathcal{F}$ αριθμήσιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 4 (Μαθηματική Επαγωγή, 1 μονάδα). Θεωρούμε n φίλους που ο καθένας ξέρει ένα διαφορετικό μυστικό και επικοινωνούν μεταξύ τους τηλεφωνικά ανά δύο. Κάθε φορά που δύο φίλοι μιλούν στο τηλέφωνο, ανταλλάσσουν όλα τα μυστικά που γνωρίζουν εκείνη τη στιγμή. Συμβολίζουμε με $A(n)$ τον ελάχιστο αριθμό τηλεφωνημάτων που απαιτούνται για να μάθουν όλοι οι φίλοι όλα τα μυστικά.

1. Να υπολογίσετε τα $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$, και $A(5)$. Να περιγράψετε τις αντίστοιχες ακολουθίες τηλεφωνημάτων.
2. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 4$, $A(n) \leq 2n - 4$.

Θέμα 5 (Κατηγορηματική Λογική και Μαθηματική Επαγωγή, 1.5 μονάδες). Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P. Έστω η πρόταση:

$$\varphi \equiv [\forall x P(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)) \wedge \forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))] \to \exists y \forall x P(y,x)$$

1. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στον πληθάριθμο του σύμπαντος, να δείξετε ότι κάθε ερμηνεία σε πεπερασμένο σύμπαν αποτελεί μοντέλο της φ.
2. Να διατυπώσετε ερμηνεία που δεν αποτελεί μοντέλο της φ.

Παράδοση. Οι εργασίες θα παραδοθούν στο μάθημα της Δευτέρας 19/4.

Καλή Επιτυχία!