

# Αρχή του Περιστερώνα

---

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Συναρτήσεις

---

- **Συνάρτηση:** διμελής σχέση  $R \subseteq A \times B$  όπου για κάθε  $a \in A$ , υπάρχει μοναδικό  $\beta \in B$  τ.ω.  $(a, \beta) \in R$ .
  - $A$ : πεδίο ορισμού.  $B$ : πεδίο τιμών.  $R(a) = \beta$ :  $\beta$  εικόνα  $a$  (ως προς  $R$ ).
- $f$  συνάρτηση **1-1**:  $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ .
  - Δεν υπάρχουν δύο στοιχεία με ίδια εικόνα.
- $f$  συνάρτηση **επί**: για κάθε  $\beta \in B$ , υπάρχει  $a \in A$  με  $f(a) = \beta$ .
  - Κάθε στοιχείο του  $B$  είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του  $A$ .
- $f$  **αμφιμονοσήμαντη**: 1-1 και επί.
  - $f$  αντιστοιχία μεταξύ στοιχείων  $A$  και  $B$ .
  - Αντίστροφη  $f^{-1}$  είναι **συνάρτηση** ανν  $f$  **αμφιμονοσήμαντη**.

# Αρχή Περιστερών

---

- Αν  $|A| > |B|$ , **δεν** υπάρχει 1-1 συνάρτηση από A στο B.
  - Για κάθε συνάρτηση  $f$ , υπάρχουν  $a_1, a_2 \in A$  τ.ω.  $f(a_1) = f(a_2)$ .
  - Αν  $n$  περισσότερα σε  $m$  φωλιές και  $n > m$ , φωλιά με  $\geq 2$  περισσότερα.
- Για κάθε συνάρτηση  $f$  από A στο B, υπάρχουν  $\geq k = \lceil |A|/|B| \rceil$   $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$  με  $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k)$ .
  - Αν  $n$  περισσότερα σε  $m$  φωλιές, φωλιά με  $\geq \lceil n/m \rceil$  περισσότερα.
- Τετριμμένα παραδείγματα:
  - Σε κάθε σύνολο 13 ανθρώπων, υπάρχουν  $\geq 2$  γεννημένοι ίδιο μήνα.
  - Στον κόσμο ζουν  $\geq 2$  άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο δευτερόλεπτο.
  - Στην Ελλάδα ζουν  $\geq 2$  άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο πεντάλεπτο.
  - Σε κάθε πάρτυ, υπάρχουν δύο καλεσμένοι με τον ίδιο αριθμό φίλων στο πάρτυ (υποθ: σχέση φίλος συμμετρική, όχι ανακλαστική).

# Παραδείγματα

---

- Σε κάθε σύνολο 1000 φυσικών, υπάρχουν  $x \neq y$ :  $573 \mid (x - y)$ .
  - Ποσότητες που αντιστοιχούν σε «περιστέρια» και «φωλιές»;
  - «Περιστέρια»: 1000 φυσικοί.
  - «Φωλιές»: 573 διαφορετικές τιμές για  $n \bmod 573$ .
- Για κάθε σύνολο 10 (διαφορετικών) φυσικών  $< 100$ , υπάρχουν δύο διαφορετικά υποσύνολα με ίδιο άθροισμα.
  - «Περιστέρια»:  $2^{10} - 1 = 1023$  διαφορετικά μη κενά υποσύνολα.
  - «Φωλιές»: Πιθανές τιμές για αθροίσματα υποσυνόλων ( $\leq 946$ ).
- Αν θεωρήσουμε 26 διαφορετικά υποσύνολα του  $\{1, \dots, 9\}$  με 3 στοιχεία το πολύ, δύο από αυτά έχουν το ίδιο άθροισμα.
  - «Περιστέρια»: 26 διαφορετικά υποσύνολα.
  - «Φωλιές»: Πιθανές τιμές για αθροίσματα υποσυνόλων ( $\leq 25$ ).

# Παραδείγματα

---

- Αν 7 διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το  $\{1, 2, \dots, 11\}$ , 2 από αυτούς αθροίζονται στο 12.
  - «Περιστέρια»: 7 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: 6 «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο 12.
    - $\{1, 11\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{6\}$ .
    - $\{6\}$  «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το 6).
    - Επιλέγουμε και τους δύο αριθμούς κάποιου άλλου ζευγαριού.
- Αν  $n+1$  διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το  $\{1, \dots, 2n-1\}$ , 2 από αυτούς αθροίζονται στο  $2n$ .
  - «Περιστέρια»:  $n+1$  επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»:  $n$  «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο  $2n$ .
    - $\{n\}$  «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το  $n$ ).

# Παραδείγματα

---

- Αν επιλέξουμε  $n+1$  φυσικούς από  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ , υπάρχουν δύο που ο ένας διαιρεί τον άλλο.
  - «Περιστέρια»:  $n+1$  επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»:  $n$  περιττοί αριθμοί στο  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ .
    - Αριθμός  $x$  στη «φωλιά»  $m$  ανν  $m$  μεγαλύτερος περιττός διαιρέτης του  $x$  ( $x = 2^k m$ , για κάποιο  $k \geq 0$ ).
    - Αριθμοί  $x$  και  $y$  στην ίδια «φωλιά»:  $x = 2^k m$  και  $y = 2^s m$ , άρα είτε  $x \mid y$  είτε  $y \mid x$ .

# Παραδείγματα

---

- Αν επιλέξουμε  $n+1$  φυσικούς από  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ , υπάρχουν δύο που είναι **σχετικά πρώτοι**.
  - Αρκεί νδο υπάρχουν δύο αριθμοί  $\alpha, \beta$ :  $\beta = \alpha + 1$ .
  - «Περιστέρια»:  $n+1$  επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»:  $n$  ζεύγη «συνεχόμενων» αριθμών στο  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ .
    - $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n - 1, 2n\}$ .
- Αν επιλέξουμε  $n+1$  φυσικούς υπάρχουν δύο που η **διαφορά τους διαιρείται από το  $n$** .
  - «Περιστέρια»:  $n+1$  επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»:  $n$  υπόλοιπα διαίρεσης με  $n$  ( $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ).
  - Δύο αριθμοί σε ίδια «φωλιά»: **διαφορά τους διαιρείται από  $n$** .

# Παραδείγματα

---

- Σε κάθε ακολουθία  $n^2+1$  διαφορετικών αριθμών, είτε αύξουσα υπακολουθία μήκους  $n+1$  είτε φθίνουσα υπακολ. μήκους  $n+1$ .
  - Υπακολουθία προκύπτει με διαγραφή κάποιων αριθμών.
- Αντιστοιχούμε αριθμό  $a_k$  στο  $(x_k, y_k)$ .
  - $x_k (y_k)$ : μήκους μεγαλύτερης αύξουσας (φθίνουσας) υπακολουθίας που αρχίζει στη θέση  $k$ .
- Αν όλα  $x_k \leq n$  και όλα  $y_k \leq n$ , #ζευγών  $\leq n^2$ .
  - Αρχή περιστέρωνα: υπάρχουν δύο αριθμοί  $a_k$  και  $a_s$  ( $k < s$ ) που αντιστοιχούνται στο ίδιο ζεύγος  $(x, y)$ .
  - Άτοπο: αν  $a_k < a_s$ , τότε  $x_k > x_s$ , ενώ αν  $a_k > a_s$ , τότε  $y_k > y_s$ .
- Αποδεικνύεται ορίζοντας κατάλληλο poset και μελετώντας μήκη αλυσίδων και μεγέθη αντιαλυσίδων (βλ. Liu, 4.41, 4.42).



# Αριθμοί Ramsey

---

- Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων, είτε 3 φίλοι είτε 3 άγνωστοι.
  - Για κάθε χρωματισμό ακμών στο  $K_6$  με μπλε και κόκκινο, υπάρχει μονοχρωματικό  $K_3$ .
- Υπάρχει άνθρωπος  $a$  που έχει είτε 3 φίλους είτε 3 αγνώστους.
  - Χβτγ. υποθέτουμε ότι  $a$  έχει 3 φίλους:  $\beta, \gamma, \delta$ .
  - Αν στους  $\beta, \gamma, \delta$  δύο φίλοι (π.χ.  $\beta, \gamma$ ): έχουμε 3 φίλους ( $a, \beta, \gamma$ ).
  - Αν στους  $\beta, \gamma, \delta$  όλοι άγνωστοι: έχουμε 3 αγνώστους ( $a, \beta, \gamma$ ).
- $R(m, s) =$  ελάχιστο  $n$  τ.ω για κάθε χρωματισμό ακμών του  $K_n$  με μπλε και κόκκινο, υπάρχει είτε μπλε  $K_m$  είτε κόκκινο  $K_s$ .
  - $R(m, s) = R(s, m)$  και  $R(m, s) \leq R(m - 1, s) + R(m, s - 1)$ .
  - Αντίστοιχα για περισσότερα από 2 χρώματα.
  - $\forall$  χρωματισμό ακμών ενός μεγάλου πλήρους γραφήματος, υπάρχει μονοχρωματικό πλήρες υπογράφημα επιθυμητού μεγέθους.