Μη-Αριθμήσιμα Σύνολα, Διαγωνιοποίηση

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αριθμήσιμα Σύνολα

- Σύνολο **πεπερασμένο** αν έχει πεπερασμένο πληθικό αριθμό, διαφορετικά **άπειρο**.
- Cantor, 1873: Σύγκριση μεγεθών άπειρων συνόλων.
- **Ισάριθμα** σύνολα A και B:
  - Υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση (αντιστοιχία) $f : A \to B$.
    Υπάρχει τέλειο ταίριασμα μεταξύ στοιχείων A και στοιχείων B.
    Π.χ. {1, 2, 3, 4}, {Α, Β, Γ, Δ}: (1, Α), (2, Β), (3, Γ), (4, Δ).
- **Πεπερασμένο** σύνολο A:
  - Ισάριθμο του {1, ..., n}, για κάποιο φυσικό $n \geq 1$.
    Το n είναι ο πληθικός αριθμός του συνόλου A.
- **Αριθμήσιμο** σύνολο A: πεπερασμένο ή ισάριθμο του N.
  - Υπάρχει τέλειο ταίριασμα στοιχείων A με φυσικούς αριθμούς.
    Με {1, ..., |A|} αν A πεπερασμένο, με N αν A άπειρο.

Αριθμήσιμα Σύνολα

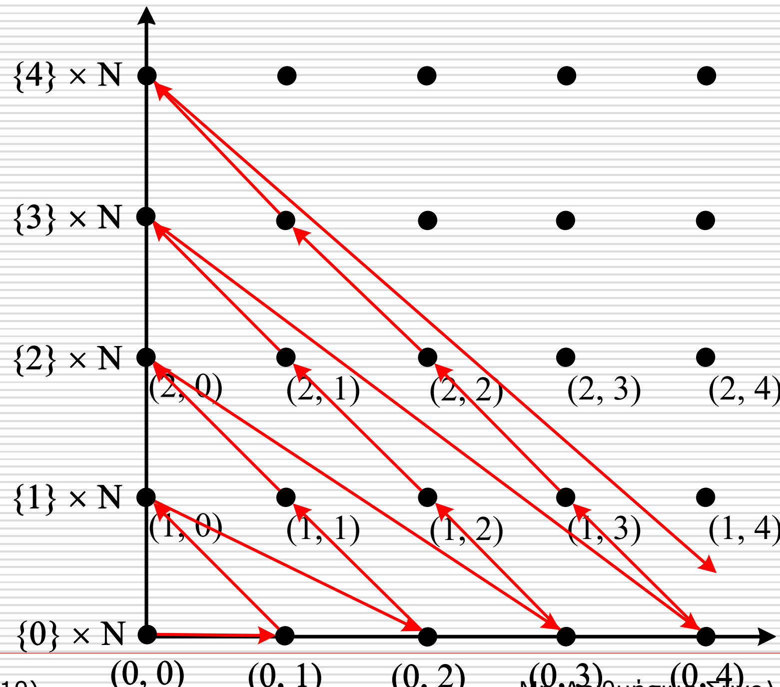
- Διαδικασία **(απ)αρίθμησης** στοιχείων συνόλου A:
  - Εξελίσσεται σε διακριτά βήματα: 1, 2, 3, ...
    Κάθε βήμα απαριθμεί διαφορετικό στοιχείο.
  - Κάθε συγκεκριμένο στοιχείο απαριθμείται σε συγκεκριμένο (πεπερασμένο) βήμα.
  - Αριθμήσιμο σύνολο επιδέχεται διαδικασίας απαρίθμησης.
- Παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων:
  - Σύνολο θετικών ζυγών αριθμών: αριθμός *i* στο βήμα *i*/2, ή $f(i) = i/2$.
  - Σύνολο ακεραίων αριθμών: $f(i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = 0 \\ 2i & \text{αν } i \text{ θετικός} \\ 2i+1 & \text{αν } i \text{ αρνητικός} \end{cases}$
  - Ένωση πεπερασμένου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων.
    Π.χ. ένωση k άπειρων (ξένων) συνόλων: $\{1, \ldots, k\} \times \mathrm{N}$

$$f(i,j) = j\,k + i,\ i \in \{1, \ldots, k\},\ j \in \mathbb{N}$$

Αριθμήσιμα Σύνολα

- Παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων:
  - Ένωση αριθμήσιμα άπειρου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων, π.χ. N×N

$$f(i,j) = \frac{1}{2}[(i+j)^2 + 3i + j]$$



(Μη-)Αριθμήσιμα Σύνολα

- Άλλα παραδείγματα αριθμήσιμων συνόλων:
  - Σύνολο ρητών (κλασματικών) αριθμών Q
    - Παρόμοια με το $N \times N$.
  - Σύνολο συμβολοσειρών (πεπερασμένου, αλλά απεριόριστου, μήκους) με γράμματα της Ελληνικής γλώσσας.
    - Λεξικογραφική διάταξη.
- Υπάρχουν **μη-αριθμήσιμα** σύνολα;
  - Πραγματικοί αριθμοί R, διαστήματα πραγματικών, π.χ. [0, 1].
  - Δυναμοσύνολα (αριθμήσιμα) άπειρων συνόλων, π.χ. 2^N.
- Πως **αποδεικνύουμε** ότι ένα σύνολο είναι μη-αριθμήσιμο;
  - Cantor: αποδεικτική τεχνική της **διαγωνιοποίησης** το 1891.
  - Σημαντικότατες εφαρμογές, μεταξύ άλλων στη Θεωρία Υπολογισμού και στην Υπολογιστική Πολυπλοκότητα.

Μη-Αριθμήσιμα Σύνολα

- Το 2^N είναι μη-αριθμήσιμο.
  - Έστω ότι 2^N αριθμήσιμο, άρα ισάριθμο του N.
  - Άρα υπάρχει αντιστοιχία μελών του 2^N με φυσικούς στο N.
  - Με βάση αυτή, απαριθμούμε S_0, S_1, S_2, S_3, … ,
    όλα τα υποσύνολα φυσικών / στοιχεία του 2^N.
  - Έστω το σύνολο φυσικών $D = \{ k \in N : k \notin S_k \}$
  - Σε ποια θέση εμφανίζεται το D στην απαρίθμηση;
    - $D \neq S_0$ γιατί 0 ανήκει μόνο σε ένα από τα D και S_0.
    - $\forall m$, $D \neq S_m$ γιατί m ανήκει μόνο σε ένα από τα D και S_m.
      Τα D και S_m «διαφωνούν» στο στοιχείο m.
  - **Άτοπο**: το D δεν εμφανίζεται πουθενά στην απαρίθμηση!
  - Άρα το 2^N δεν είναι αριθμήσιμο.

Διαγωνιοποίηση

- Έστω **ισάριθμα** σύνολα A και B και (διμελής σχέση) $R \subseteq A \times B$
  - Αριθμήσιμα: θεωρούμε A = $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ και B = $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$
- Για κάθε $a_k \in A$, γραμμή k της R: $R_k = \{b_j \in B : (a_k, b_j) \in R\}$
- Συμπλήρωμα διαγωνίου $D = \{b_k \in B : (a_k, b_k) \notin R\}$
- D είναι **διαφορετικό** από κάθε γραμμή k.
  - Διαφέρει από R_1 στο b_1, από R_2 στο b_2, κοκ.

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$
$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

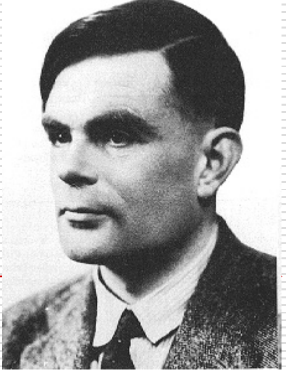
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	×		×		×
a_2			×	×	×
a_3		×		×	
a_4	×			×	×
a_5		×	×		

$R_1 = \{b_1, b_3, b_5\}$
$R_2 = \{b_3, b_4, b_5\}$
$R_3 = \{b_2, b_4\}$
$R_4 = \{b_1, b_4, b_5\}$
$R_5 = \{b_2, b_3\}$
$D = \{b_2, b_3, b_5\}$

Υπόθεση του Συνεχούς

- Cantor διατύπωσε και προσπάθησε να αποδείξει την Υπόθεση του Συνεχούς (Continuum Hypothesis):
  - Δεν υπάρχει σύνολο με πληθικό αριθμό ανάμεσα στο N και στο R.
- Gödel (1937) έδειξε ότι υπόθεση είναι συμβατή με τα αξιώματα της συνολοθεωρίας (άρα **δεν** υπάρχει **αντιπαράδειγμα**).
- Cohen (1963) έδειξε ότι άρνηση της υπόθεσης είναι συμβατή με τα αξιώματα της συνολοθεωρίας (άρα **δεν** υπάρχει **απόδειξη**).
- Υπόθεση του Συνεχούς δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί ούτε να καταρριφθεί!

Μη Υπολογισιμότητα



- **Πρόβλημα Τερματισμού** (Halting Problem):
  - Μηχανή Turing που με είσοδο μηχανή Turing M και «δεδομένα» w, αποφαίνεται αν M(w) τερματίζει.
- **A. Turing**: Πρόβλημα Τερματισμού δεν είναι επιλύσιμο.
- Θ.δ.ο. **δεν** υπάρχει **πρόγραμμα Τ** που με είσοδο πρόγραμμα Π και δεδομένα Δ, αποφασίζει αν Π(Δ) τερματίζει.
  - Π(Δ): εκτέλεση προγράμματος Π με είσοδο αρχείο δεδομένων Δ.

Μη Υπολογισιμότητα

- Έστω πρόγραμμα T: T(Π, Δ) = ΝΑΙ ανν Π(Δ) τερματίζει.
  - Πρόγραμμα Π και δεδομένα Δ δίνονται στο T ως αρχεία Π (εκτελέσιμο αρχείο) και Δ (οτιδήποτε αρχείο).
  - Δεδομένα μπορεί εκτελέσιμο αρχείο, και αρχείο περιγραφής Π. T(Π, Π): ελέγχει αν Π(Π) τερματίζει.
- Ορίζουμε πρόγραμμα D με είσοδο εκτελέσιμο αρχείο Π, D(Π):

  if T(Π, Π) = ΝΑΙ **then** loop forever **else** halt

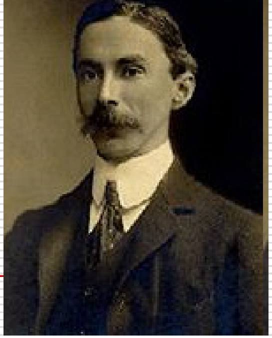
  - D(Π) **τερματίζει** ανν Π(Π) **δεν** τερματίζει.
- Τι παράγει η κλήση D(D);
  - Αν D(D) **τερματίζει**, T(D, D) = ΝΑΙ, και D(D) **δεν** τερματίζει!
  - Αν D(D) **δεν** τερματίζει, T(D, D) = ΟΧΙ, και D(D) **τερματίζει**!
- Αντίφαση, άρα **δεν** υπάρχει τέτοιο πρόγραμμα!

Διαγωνιοποίηση

- Προγράμματα (εκτελέσιμα αρχεία) είναι αριθμήσιμα:
  - Π1, Π2, Π3, ... μια απαρίθμησή τους.
- Έστω ότι υπάρχει πρόγραμμα T που για προγράμματα $Π_i$, $Π_j$, $T(Π_i, Π_j) = \text{ΝΑΙ}$ **ανν** $Π_i(Π_j)$ τερματίζει.
  - Πρόγραμμα D που $\forall$πρόγρ. $Π_i$, $D(Π_i) = \text{ΝΑΙ}$ ανν $Π_i(Π_i)$ **δεν** τερματίζει.
  - D εμφανίζεται στην απαρίθμηση.
- Σχέση H: $(Π_i, Π_j) \in H$ ανν $Π_i(Π_j)$ τερματίζει.
  - (D, D) ανήκει στην H;

	$Π_1$	$Π_2$	$Π_3$	$Π_4$	...	D	...
$Π_1$	T	Δ	Δ	T		T	
$Π_2$	T	Δ	Δ	T	...	Δ	...
$Π_3$	Δ	T	Δ	Δ		T	
$Π_4$	T	Δ	T	T		T	
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		
D	Δ	T	T	Δ		?	
$\vdots$			$\vdots$				$\ddots$

Παράδοξο του Russel



- Σύνολα που ορίζονται με βάση χαρακτηριστική ιδιότητα στοιχείων τους και χωρίς αναφορά σε σύμπαν U.
- S περιέχει σύνολα που δεν είναι στοιχεία του εαυτού τους.

$$S = \{A : A \text{ σύνολο και } A \notin A\}$$

  - Κατά κανόνα, σύνολα **δεν** είναι στοιχεία του εαυτού τους, π.χ. N δεν είναι ακέραιος, ανθρωπότητα δεν είναι άνθρωπος.
  - Αλλά π.χ. σύνολο ιδεών μπορεί να θεωρηθεί ιδέα.
- Είναι το S στοιχείο του εαυτού του; Δηλ. $S \in S$;
  - Αν $S \in S$, τότε $S \notin S$. Αν $S \notin S$, τότε $S \in S$. Αντίφαση!
- Υπάρχει κουρέας σε χωριό που ξυρίζει οποιονδήποτε δεν ξυρίζεται μόνος του.
  - S(x, y): «x ξυρίζει y». $\exists x \forall y (S(x,y) \leftrightarrow \neg S(y,y))$
  - Μη ικανοποιήσιμη δήλωση! (Ποιός ξυρίζει τον κουρέα;)

Παράδοξο του Russel

- Ανάγκη για αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων και των Μαθηματικών.
  - Σημαντικές ανακαλύψεις και επίδραση στη (μαθηματική) σκέψη.
- Ορισμός συνόλου με χαρακτηριστική ιδιότητα αναφέρεται σε συγκεκριμένο σύμπαν U.

$$S = \{A \in U : A \notin A\}$$

  - Αν $S \in S$, τότε $S \notin S$.
  - Αν $S \notin S$, τότε $S \notin U$ ή $S \in S$. Άρα $S \notin S$.