

Σύνολα

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Ορισμός Συνόλου

- Σύνολο είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων.
 - Π.χ. {Δημήτρης, Ανδρέας, Άρης}, {α, β}, {α, {α}}, {{α}}},
 $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$, {1, 3, 5, 7, ...}, {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...}
 - Αντικείμενα **όχι** κατ' ανάγκη **ομοειδή**
π.χ. {Δημήτρης, 1, α, 1041, {α, β, γ}, {{}}, PC1}
 - **Μέλη** ή **στοιχεία** του συνόλου: $x \in \{x, y, z\}$, $a \notin \{x, y, z\}$
 - Κάθε αντικείμενο **είτε είναι μέλος** ενός συνόλου **είτε όχι**.
- Σύνολο ορίζεται:
 - με **απαρίθμηση** των στοιχείων του, π.χ. {α, β, γ}
 - με **χαρακτηριστική ιδιότητα** των στοιχείων του,
π.χ. $E = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ άρτιος}\}$, $A = \{x \in U : P(x)\}$
 - ως **αποτέλεσμα πράξεων** σε σύνολα που έχουν ήδη ορισθεί.

Ορισμός Συνόλου

- Στοιχεία ενός συνόλου:
 - Δεν επαναλαμβάνονται, π.χ. $\{a, \beta\}$ και όχι $\{a, a, \beta\}$.
 - Επανάληψη στοιχείων: **πολυσύνολα**.
 - Δεν έχουν διάταξη, π.χ. $\{a, \beta, \gamma\} = \{\gamma, \beta, a\} = \{\beta, a, \gamma\}$
- **Πληθικός αριθμός** συνόλου A : #στοιχείων A , $|A|$.
 - Πεπερασμένα και άπειρα σύνολα.
- Σύνολα A και B **ταυτίζονται** ($A = B$) ανν αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία.

Υποσύνολα και Κενό Σύνοιο

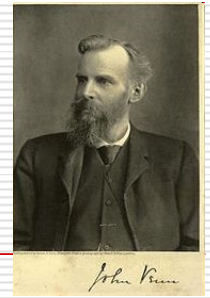
- **A υποσύνολο B** (γράφουμε $A \subseteq B$) αν κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B: $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.
 - Π.χ. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \dots, z\}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\{2, 4, 6, 8, 10\} \not\subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 - Για κάθε σύνολο A, $A \subseteq A$.
 - Αν $A \subseteq B$, $|A| \leq |B|$
 - $A = B$ ανν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.
 - A γνήσιο υποσύνολο B ($A \subset B$): $A \subseteq B$ και $A \neq B$.

- **Κενό σύνολο** ($\{ \}$ ή \emptyset): σύνολο χωρίς κανένα στοιχείο.
 - $|\emptyset| = 0$.
 - Για κάθε σύνολο A, $\emptyset \subseteq A$ (απόδειξη;).
 - Κενό σύνολο είναι μοναδικό (απόδειξη;).

Δυναμοσύνολο

- **Δυναμοσύνολο** συνόλου A , $P(A)$ ή 2^A , είναι **σύνολο** με στοιχεία **όλα τα υποσύνολα** του A : $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$
 - $P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
 - $2^{\{a, \beta, \gamma\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{a, \beta\}, \{a, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{a, \beta, \gamma\}\}$
 - $\emptyset \in P(A)$ και $A \in P(A)$, για κάθε σύνολο A .
 - $2^\emptyset = \{\emptyset\}$. $2^{P(\emptyset)} = ?$. $2^{P(\{\emptyset\})} = ?$.
- Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A , $|2^A| = 2^{|A|}$.
 - Απόδειξη με επαγωγή και με συνδυαστικό επιχείρημα.
- \subseteq και \in . Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;
 - $2 \in \{1, 2, 3\}$. $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$. $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$.
 - $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$. $\{2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\}$. $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$.

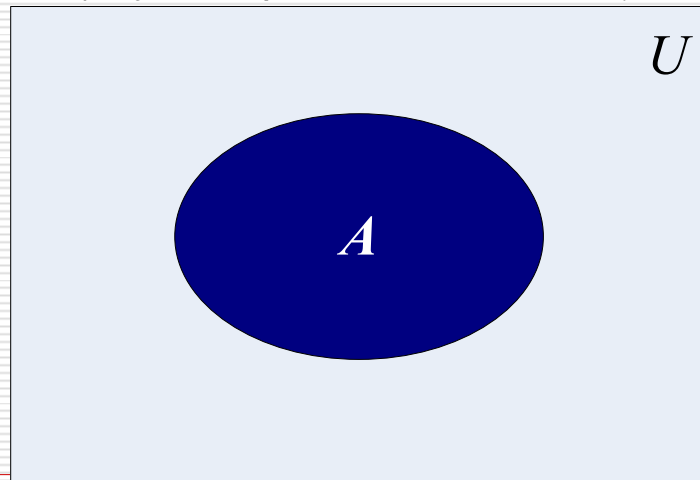
Διαγράμματα Venn



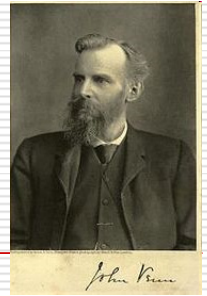
- Αναπαριστούν σύνολα και σχέσεις μεταξύ συνόλων.
 - Διαγράμματα για σύνολα που έχουν κοινά στοιχεία αλλά όχι σχέση υποσυνόλου, ταυτίζονται, κλπ.

Ορθογώνιο αναπαριστά σύμπαν U που περιέχει όλα τα αντικείμενα.

Ελλείψεις αναπαριστούν σύνολα υπό μελέτη.

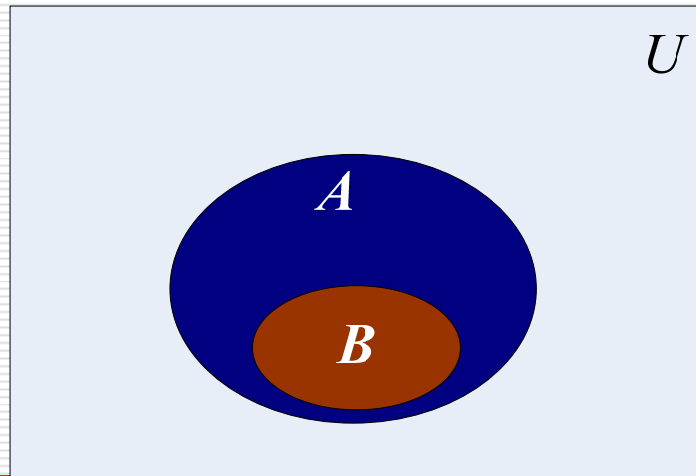


Διαγράμματα Venn

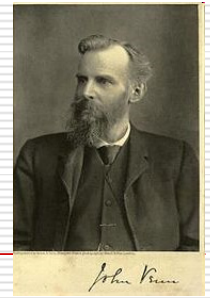


- Αναπαριστούν σύνολα και σχέσεις μεταξύ συνόλων.
 - Διαγράμματα για σύνολα που έχουν κοινά στοιχεία αλλά όχι σχέση υποσυνόλου, ταυτίζονται, κλπ.

B (γνήσιο) υποσύνολο A

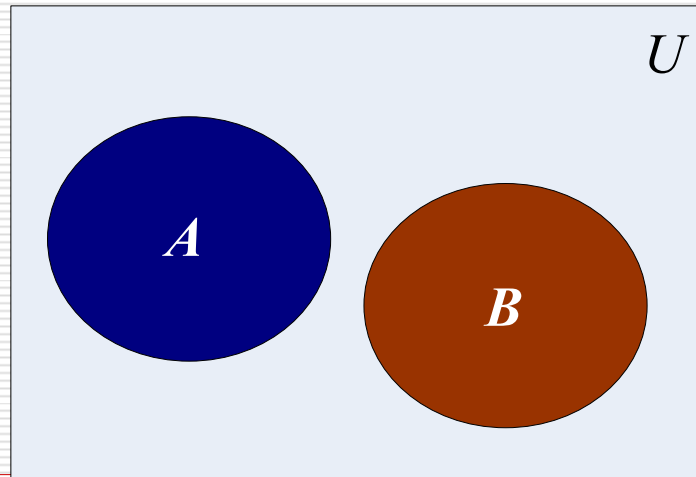


Διαγράμματα Venn



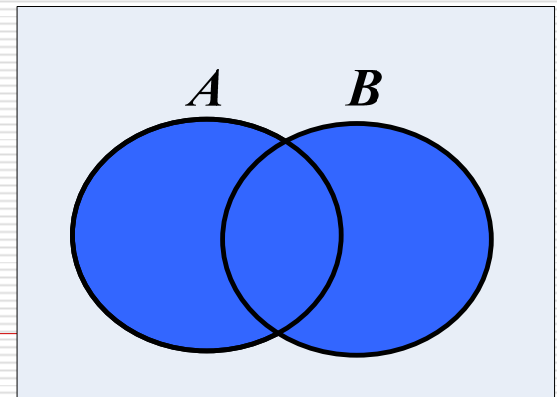
- Αναπαριστούν σύνολα και σχέσεις μεταξύ συνόλων.
 - Διαγράμματα για σύνολα που έχουν κοινά στοιχεία αλλά όχι σχέση υποσυνόλου, ταυτίζονται, κλπ.

*A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία
(ξένα μεταξύ τους)*



Πράξεις Συνόλων

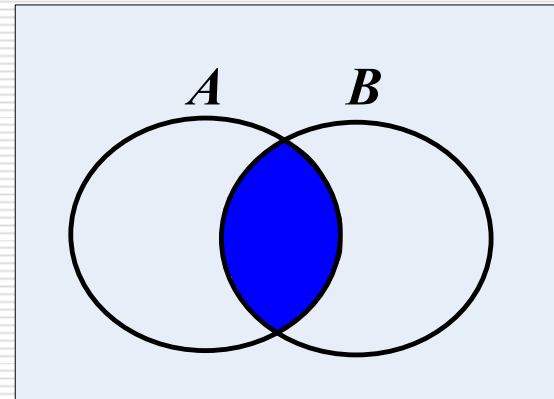
- **Ένωση** συνόλων A και B , $A \cup B$:
 - Σύνολο με στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B (ή και στα δύο).
 - Π.χ. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
 $\{0, 2, 4, 6, \dots\} \cup \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \mathbb{N}$.
 - Αντιμεταθετική, προσεταιριστική, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$, ορίζεται η ένωση $n \geq 2$ συνόλων.
 - $A \subseteq B$ ανν $A \cup B = B$.
Ειδικά $A \cup U = U$.
 - $A \subseteq A \cup B$, για κάθε B .
 - Αν $A, B \subseteq C$, τότε $A \cup B \subseteq C$.



Πράξεις Συνόλων

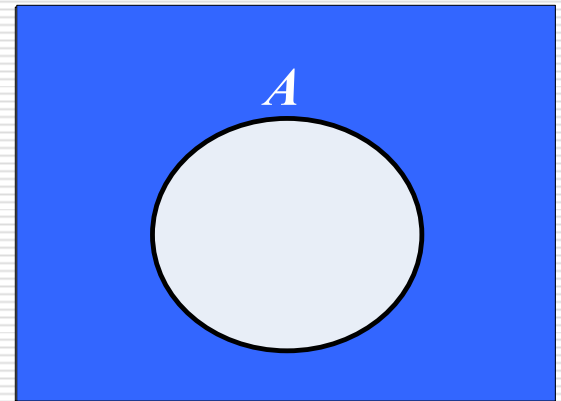
□ Τομή συνόλων A και B , $A \cap B$:

- Σύνολο με κοινά στοιχεία A και B .
- Π.χ. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.
 $\{0, 2, 4, 6, \dots\} \cap \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \emptyset$
- Αντιμεταθετική, προσεταιριστική, $A \cap U = A$, $A \cap A = A$, ορίζεται η τομή $n \geq 2$ συνόλων.
- $A \subseteq B$ αν $A \cap B = A$.
Ειδικά $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- $A \cap B \subseteq A$, για κάθε B .
Αν $A, B \subseteq C$, τότε $A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq C$.
- **Επιμεριστική** ιδιότητα τομής ως προς ένωση και ένωσης ως προς τομή.
- Αν $A \cap B = \emptyset$, A και B **ξένα** ή **διαζευγμένα** σύνολα.



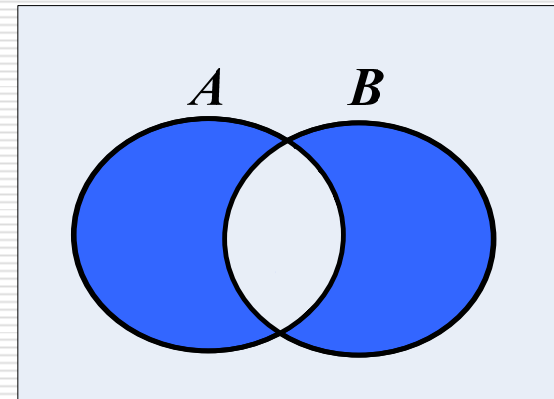
Πράξεις Συνόλων

- **Διαφορά** συνόλου A από σύνολο B , $A - B$:
 - Σύνολο με στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B .
 - Π.χ. $\{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4\} = \{1\}$,
 $\{2, 3, 4\} - \{1, 2, 3\} = \{4\}$,
 $\mathbb{N} - \{0, 2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$.
 - Όχι αντιμεταθετική!
- **Συμπλήρωμα** συνόλου A , \bar{A} :
 - Σύνολο με στοιχεία που δεν ανήκουν στο A , $U - A$.
 - Συμπλήρωμα $\emptyset = U$.
Συμπλήρωμα $U = \emptyset$.
 - $A - B = A \cap \bar{B}$



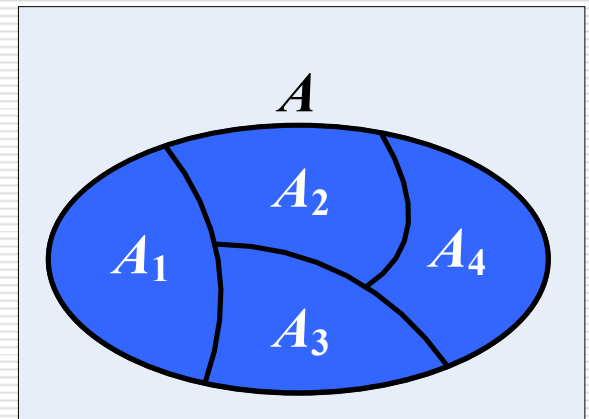
Πράξεις Συνόλων

- **Συμμετρική διαφορά** συνόλων A και B , $A \oplus B$:
 - Σύνολο με στοιχεία που ανήκουν είτε στο A είτε στο B αλλά όχι και στα δύο.
 - $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$



Διαμέριση Συνόλου

- Μη κενό σύνολο A . Συλλογή A_1, A_2, \dots, A_n μη κενών υποσυνόλων του A αποτελεί **διαμέριση** του A ανν:
 - $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
 - Τα A_1, A_2, \dots, A_n είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.
- Παραδείγματα:
 - Τα $\{0, 2, 4, \dots\}$ και $\{1, 3, 5, \dots\}$ αποτελούν διαμέριση του \mathbb{N} .
 - Τα $\{-1, -2, -3, \dots\}, \{0\}, \{1, 2, 3, \dots\}$ αποτελούν διαμέριση του \mathbb{Z} .



Ιδιότητες Πράξεων Συνόλων

Αντιμεταθετική	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Προσεταιριστική	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Επιμεριστική	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Κανόνας συμπλήρωσης	$\overline{\overline{A}} = A$

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (II)

Ουδέτερο στοιχείο	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$
Απορροφητικό στοιχείο	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup U = U$
Αυτοπάθεια	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Κανόνας Απορρόφησης	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Κανόνας De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Πράξεις Συνόλων

- Αντιστοιχία πράξεων συνόλων με λογικούς συνδέσμους.
 - Στοιχεία συνόλου A έχουν ιδιότητα (α) .
 - Στοιχεία συνόλου B έχουν ιδιότητα (β) .
 - Π.χ. στοιχεία συνόλου $A \cup B$ έχουν ιδιότητα $(\alpha) \vee (\beta)$.
- Ιδιότητες πράξεων συνόλων και σχέσει μεταξύ συνόλων ελέγχονται / αποδεικνύονται με **membership tables**.
 - Πίνακες που εξετάζουν όλα τα ενδεχόμενα για το που ανήκει ένα στοιχείο.
 - Ισοδύναμο των **πινάκων αλήθειας**.
- Δείτε **Liu**, 1.1 και 1.2, **Rosen**, 1.4 και 1.5, και **Epp**, Κεφ. 5, για σύνολα, πράξεις συνόλων, και ιδιότητες.

Παράδειγμα Membership Table

- Παράδειγμα membership table για επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Παραδείγματα

□ Ν.δ.ο. $(A \cup B) \cap \bar{B} = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

■ Αρκεί ν.δ.ο. $A - B = A$ ανν $A \cap B = \emptyset$, αφού

$$(A \cup B) \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})$$

$$= A \cap \bar{B}$$

$$= A - B$$

□ Ν.δ.ο. $\overline{(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}} = A$

$$\overline{(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}} = \bar{\bar{A}} = A$$

□ Ν.δ.ο. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.

□ Ν.δ.ο. $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. Να δώσετε παράδειγμα όπου το 1^ο είναι γνήσιο υποσύνολο του 2^{ου}.

Παραδείγματα

□ Ν.δ.ο. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

$$\begin{aligned}(A - B) - C &= (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} \\ &= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) \\ &= A \cap \overline{(B \cup C)}\end{aligned}$$

□ Ν.δ.ο. $(A - B) - C = (A - C) - B$

■ $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
 $= A - (C \cup B)$
 $= (A - C) - B$

Παραδείγματα

□ Ν.δ.ο. $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

$$\begin{aligned}(A - C) - (B - C) &= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) \\ &= (A \cap \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup C)\end{aligned}$$

$$= (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup \overbrace{(A \cap \overline{C} \cap C)}^{=\emptyset}$$

$$= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$$

$$= (A - B) - C$$