

Στοιχεία Προτασιακής Λογικής

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Μαθηματικές Προτάσεις

- (Μαθηματική) **πρόταση**: δήλωση που μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής (όχι και τα δύο).
 - Το όνομά μου είναι Δημήτρης.
 - Χθες χιονισε στην Καστοριά.
 - Ο Σεφέρης τιμήθηκε με το Νόμπελ Λογοτεχνίας.
 - Σήμερα είναι η πρώτη μέρα της άνοιξης.
- Άλλα όχι:
 - Τι ώρα είναι;
 - Κάνετε ησυχία παρακαλώ.
 - Σχεδόν κάθε μέρα βρέχει (χωρίς το σχεδόν;)

Προτασιακή Λογική

- Προτάσεις συνδυάζονται λογικά: σύνθετες προτάσεις.
 - Αν χιονίσει, θα πάω για σκι ή θα παίξω χιονοπόλεμο.
 - Ο Δ είναι καλός ή ο Δ δεν είναι καλός.
 - Θα κάνω μάθημα στις 9 και θα παίζω μπάσκετ στις 10.
- Στοιχειώδεις προτάσεις: **προτασιακές μεταβλητές** p, q, r .
 - Βασικά δομικά στοιχεία. Διακριτές τιμές Α ή Ψ (1 ή 0).
- Συνδυασμοί προτάσεων με (λογικούς) συνδέσμους:
 $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow$.
- **Προτασιακός τύπος**:
 - Είτε προτασιακή μεταβλητή p, q, r, \dots
 - Είτε $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \oplus \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$, όπου ϕ, ψ ήδη σχηματισμένοι προτασιακοί τύποι.
- Δομή π.τ. αποτυπώνεται σε δενδροδιάγραμμα.

Σημασιολογική Προσέγγιση

- Λογικοί σύνδεσμοι ορίζονται με πίνακες αλήθειας.
- Αποτίμηση: ανάθεση τιμών αλήθειας στις μεταβλητές ενός π.τ.
 - Από τιμές αλήθειας μεταβλητών, δενδροδιάγραμμα, και πίνακες αλήθειας λογικών συνδέσμων, υπολογίζουμε τιμή αλήθειας π.τ.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
A	A	Ψ	A	A	A	A	Ψ
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ

Λογική Συνεπαγωγή

□ Αν αληθεύει το p , τότε αληθεύει το q : $p \rightarrow q$.

- Αν μελετήσεις τουλάχιστον 30 ώρες, τότε θα επιτύχεις στις εξετάσεις.
- Αν είμαι ο Πρόεδρος των ΗΠΑ, τότε όλοι βαθμολογείστε με 10.
- Αν γίνω πρωθυπουργός, θα λύσω όλα τα προβλήματα.
- Όσοι εδώ μέσα δεν είναι φοιτητές της ΣΗΜΜΥ, φοράνε μαγιό.

p	q	$p \rightarrow q$ ($\equiv \neg p \vee q$)
A	A	A
A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A

Σημασιολογική Προσέγγιση

□ Ταυτολογική ισοδυναμία $\varphi \equiv \psi$

- Για κάθε αποτίμηση, φ και ψ έχουν ίδια τιμή αλήθειας.
- Π.χ. $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

□ Ταυτολογία φ : φ πάντα A (για κάθε αποτίμηση).

- Αντίφαση φ : φ πάντα Ψ (για κάθε αποτίμηση).
- Αντίφαση φ αν $\neg\varphi$ ταυτολογία.

□ Ικανοποιήσιμος φ : φ δεν είναι αντίφαση.

- $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ ικανοποιήσιμο: $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ ικανοποιήσιμος.
 - Υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί (ταυτόχρονα) όλους τους τύπους του T .

Παραδείγματα

□ Νδο $\varphi \equiv ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

ούτε αντίφαση (άρα ικανοποιήσιμος) ούτε ταυτολογία.

- Ικανοποιήσιμος φ : $p = q = r = A$ ή $p = q = A$ και $r = \Psi$.
- Όχι ταυτολογία φ : $r = \Psi$ και είτε $p = A, q = \Psi$ είτε $p = \Psi, q = A$.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \vee q) \rightarrow r$	φ
A	A	A	A	A	A	A	A
A	A	Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	A	Ψ	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	A	A	A	A
Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A

Παραδείγματα

□ Νδο $\psi \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ταυτολογία.

- Αν $p = A$, τότε A (αληθές συμπέρασμα).
- Αν $p = \Psi$, τότε A (ψευδής υπόθεση).

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
A	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	A

□ Νδο $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ ταυτολογία.

- Κάθε π.τ. με ίδια συντακτική μορφή $\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$ (για κάθε φ, ψ) είναι ταυτολογία!

Ταυτολογική Συνεπαγωγή

- Σύνολο π.τ. T συνεπάγεται ταυτολογικά π.τ. φ , $T \models \varphi$:
 - Κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και τον φ . (φ έπεται αναγκαία από υποθέσεις στο T).
 - $T \models \varphi$ ανν $T \cup \{\neg\varphi\}$ **μη** ικανοποιήσιμο.
 - $\emptyset \models \varphi$ (ή απλά $\models \varphi$) δηλώνει ότι φ ταυτολογία.
 - Αν T μη ικανοποιήσιμο, τότε $T \models \varphi$ για κάθε π.τ. φ !
- Θεώρημα Συμπάγειας:
 - T άπειρο σύνολο π.τ. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του είναι T ικανοποιήσιμο, τότε το T είναι ικανοποιήσιμο.

Παραδείγματα

- Έστω σύνολο π.τ. $T = \{p_1 \vee \neg p_2, p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_3\}$
 Ποιές από τις παρακάτω αληθεύουν;
 - $T \models \neg p_1 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)$ $T \models (p_2 \vee p_3) \rightarrow (p_1 \wedge p_3)$
 - $T \models (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3$ $T \models (p_1 \vee p_2) \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_3)$

Παραδείγματα

- Ποιές ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν:
 - $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$ Ψ
 - $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ \mathbf{A}
 - $\neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ \mathbf{A}
 - $\neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$ \mathbf{A}
 - $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$ Ψ
 - $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \models \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$ Ψ
 - $\neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \models \varphi \wedge \neg\varphi$ \mathbf{A}
- Παρατηρήσεις για ταυτολογικές συνεπαγωγές:
 - μη ικανοποιήσιμο \models οτιδήποτε
 - οτιδήποτε \models ταυτολογία
 - ταυτολογία \models **μόνο** ταυτολογία
 - **μόνο** μη ικανοποιήσιμο \models αντίφαση

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (I)

Αντιμεταθετική	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
Προσεταιριστική	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
Επιμεριστική	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Διπλή άρνηση	$\neg \neg p \equiv p$
Αντικατάσταση συνεπαγωγής	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Ιδιότητες Λογικών Συνδέσμων (II)

Αποκλεισμός τρίτου	$p \vee \neg p \equiv \text{A}$
Αντιθετοαναστροφή	$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
Εξαγωγή	$p \wedge q \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Άρνηση συνεπαγωγής	$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

Παράδειγμα

- Απλοποίηση προτασιακού τύπου:

$$((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\begin{aligned} \dots &\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \\ &\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi))) \\ &\equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi \\ &\equiv (\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi) \\ &\equiv \neg\psi \vee \neg\varphi \\ &\equiv \neg(\psi \wedge \varphi) \end{aligned}$$

Παράδειγμα

- Ύποπτος δηλώνει: «Λέω την αλήθεια ανν είμαι ένοχος».
- Γνωρίζουμε ότι είτε λέει πάντα αλήθεια είτε πάντα ψέματα.
 - Μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ένοχος;
- $p \equiv$ «λέει αλήθεια»
 $q \equiv$ «είναι ένοχος»
- Δήλωση: $p \leftrightarrow q$.
 - Πρέπει να αληθεύει ότι:
 $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ

Παράδειγμα

- Ο κόσμος χωρίζεται σε ευγενείς και μη-ευγενείς.
- Ευγενείς: πάντα αλήθεια. Μη-ευγενείς: πάντα ψέματα.
- Κάποιος δηλώνει:
«Αν είμαι ευγενής, τότε η σύζυγός μου είναι ευγενής».
- Είναι ευγενής; Η σύζυγός του;
- $p \equiv$ «άνδρας ευγενής»
 \equiv «άνδρας λέει αλήθεια»
 $q \equiv$ «σύζυγος ευγενής»
- Δήλωση: $p \rightarrow q$.
 - Πρέπει να αληθεύει ότι:
 $p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	Ψ

Παραδείγματα

- Είναι οι δηλώσεις: «το καλό φαγητό δεν είναι φθηνό» και «το φθηνό φαγητό δεν είναι καλό» ισοδύναμες;
 - Ισοδυναμία $\kappa \rightarrow \neg\varphi$ και $\varphi \rightarrow \neg\kappa$;
- Είναι το «αυτή η πρόταση είναι ψευδής» **μαθ.** πρόταση;
 - Μπορεί να είναι αληθής; Ψευδής;
- Δείτε ακόμη:
 - Liu, ενότητα 1.8 (σελ. 33-40), ασκήσεις 1.65-1.74.
 - Παραδείγματα: 1.15, 1.16, 1.17, και 1.18.
 - Ασκήσεις: 1.69-1.74.
 - Rosen, ενότητες 1.1, 1.2, και (εν μέρει) 1.3.
 - Epp, ενότητες 1.1, 1.2, και 1.3.

Μαθηματική Λογική

- Αντικείμενο: θεμελίωση των μαθηματικών.
 - Πότε μια πρόταση ισχύει / μια απόδειξη είναι σωστή;
 - Σημασιολογικά: συμπέρασμα έπεται αναγκαία από υποθέσεις.
 - Ενδιαφέρει αλλά δεν ελέγχεται (αποδοτικά).
 - Συντακτικά: όταν στην αποδεικτική διαδικασία εφαρμόζουμε σωστά συγκεκριμένους κανόνες (συντακτικής φύσης).
 - Διατύπωση με νοημοσύνη – «μηχανιστικός» έλεγχος.
 - Ζητούμενο ισοδυναμία: σωστές «συντακτικά» αποδείξεις θεμελιώνουν (όλες και μόνο τις) «σημασιολογικά» σωστές προτάσεις.
 - Εγκυρότητα – Πληρότητα.

Συντακτική Προσέγγιση – Προτασιακός Λογισμός

- Αξιωματικό Σύστημα (όχι μοναδικό):
 - ΑΣ1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
 - ΑΣ2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
 - ΑΣ3: $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$
- Αποδεικτικός κανόνας Modus Ponens: $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$
- Ξεκινώντας από αξιώματα (ή υποθέσεις, ή τυπικά θεωρήματα), και **μόνο** με συντακτική αντικατάσταση και MP, αποδεικνύουμε τυπικά θεωρήματα.
 - $\vdash \varphi$: φ είναι τυπικό θεώρημα.
 - $T \vdash \varphi$: φ αποδεικνύεται τυπικά από υποθέσεις T.

$$\begin{aligned} & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) & \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Τυπικές Αποδείξεις

- Τυπική απόδειξη για $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$
 1. $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
ΑΣ2 με (φ, φ) , $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$, και (χ, φ)
 2. $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ ΑΣ1 με (φ, φ) , $(\psi, \varphi \rightarrow \varphi)$
 3. $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ 1, 2, MP
 4. $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ ΑΣ1 με (φ, φ) , (ψ, φ)
 5. $\varphi \rightarrow \varphi$ 3, 4, MP

$$\begin{aligned} & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) & \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Τυπικές Αποδείξεις

- Τυπική απόδειξη για $\neg\varphi \mid - (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$
- $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$ ΑΣ3 με (φ, ψ) και (ψ, φ)
 - $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ ΑΣ1 με $(\varphi, \neg\varphi)$ και $(\psi, \neg\psi)$
 - $\neg\varphi$ Υπόθεση
 - $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ 2, 3, MP
 - $(\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$ 1, 4, MP
- Ποιά από τα παρακάτω προκύπτουν **άμεσα** από αξιώματα;
- $\varphi \rightarrow \varphi$
 - $\chi \rightarrow (\chi \rightarrow \chi)$
 - $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$
 - $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi)$

$$\begin{aligned} & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) & \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Τυπικές Αποδείξεις

- Είναι σωστή τυπική απόδειξη για $\psi \mid - (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$
- ψ Υπόθεση
 - $\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ ΑΣ1 με (φ, ψ) και $(\psi, \neg\varphi)$
 - $\neg\varphi \rightarrow \psi$ 2, 1, MP
 - $(\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$ ΑΣ3 με (φ, φ) και $(\psi, \neg\psi)$
 - $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$ 4, 3, MP
- Το βήμα 4 είναι **λάθος!!!**

$$\begin{aligned} & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) & \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Τυπικές Αποδείξεις

- Σωστή τυπική απόδειξη για $\neg\neg\psi \mid - (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$
- $\neg\neg\psi$ Υπόθεση
 - $\neg\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$ ΑΣ1 με $(\varphi, \neg\neg\psi)$ και $(\psi, \neg\varphi)$
 - $\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$ 2, 1, MP
 - $(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi)$ ΑΣ3 με (φ, φ) και $(\psi, \neg\psi)$
 - $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$ 4, 3, MP
- Με χρήση του $\mid - \psi \rightarrow \neg\neg\psi$ μπορούμε να αποδείξουμε και ότι $\psi \mid - (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \varphi$

Τυπικές Αποδείξεις

- Θεώρημα Απαγωγής: $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- Θ. Αντιθετοαναστροφής: $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi \Leftrightarrow T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$
- Τυπική απόδειξη για $\mid - \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$
- $$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta. \text{Απαγ.}}{\Leftrightarrow} \varphi \vdash \neg\neg\varphi \stackrel{\Theta. \text{Αντιθ.}}{\Leftrightarrow} \neg\varphi \vdash \neg\varphi$$
- Για νδο $\mid - (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \dots$
- ... αρκεί νδο $\{ \varphi \rightarrow \chi, \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi), \varphi \} \mid - \psi$.
- φ Υπόθεση
 - $\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$ Υπόθεση
 - $\chi \rightarrow \psi$ 2, 1, MP
 - $\varphi \rightarrow \chi$ Υπόθεση
 - χ 4, 1 MP
 - ψ 3, 5, MP

Συντακτική vs Σημασιολογική Προσέγγιση

Σημασιολογική Προσέγγιση

- ταυτολογία: $|= \varphi$
- ταυτολ. συνεπαγωγή $T \models \varphi$
- ικανοποίησιμο T
- μη ικανοποίησιμο T
- αν T μη ικανοποίησιμο,
τότε $T \models \varphi$, για κάθε φ .

Συντακτική Προσέγγιση

- τυπικό θεώρημα: $| - \varphi$
- απόδειξη με υποθέσεις $T \vdash \varphi$
- συνεπές T : $\nexists \varphi T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg \varphi$
- αντιφατικό T : $\exists \varphi T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg \varphi$
 $\forall \varphi T \vdash \varphi$
- αν T αντιφατικό,
τότε $T \vdash \varphi$, για κάθε φ .

□ Εγκυρότητα: $\forall T, \forall \varphi, T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

□ Πληρότητα: $\forall T, \forall \varphi, T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

Ασκήσεις

- Έστω T **άπειρο** σύνολο π.τ. και φ π.τ.
Νδο αν $T \models \varphi$, τότε υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ ώστε $T_0 \models \varphi$.
- $T \models \varphi$
 - (Πληρότητα) $\Rightarrow T \vdash \varphi$
 - (πεπερασμένο τυπ. αποδ.) \exists πεπερ. $T_0 \subseteq T$ ώστε $T_0 \vdash \varphi$
 - (Εγκυρότητα) $\Rightarrow \exists$ πεπερ. $T_0 \subseteq T$ ώστε $T_0 \models \varphi$

Ασκήσεις

- Έστω T **άπειρο** σύνολο π.τ. και φ π.τ.
Αν $T \models \varphi$, τότε υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ ώστε $T_0 \models \varphi$.
- Να αποδείξετε το Θ . Συμπάγειας:
- Έστω T άπειρο σύνολο π.τ. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποίησιμο, τότε το T είναι ικανοποίησιμο.
- Απαγωγή σε άτοπο: έστω ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποίησιμο αλλά το T **δεν** είναι ικανοποίησιμο.
- Θεωρούμε αντίφαση φ , άρα $\neg \varphi$ ταυτολογία.
 - T μη ικανοποίησιμο $\Rightarrow T \models \varphi$
 - (προηγούμενο) $\Rightarrow \exists$ πεπερ. $T_0 \subseteq T$ ώστε $T_0 \models \varphi$
 - $\Rightarrow \exists$ πεπερ. $T_0 \subseteq T$ ώστε $T_0 \cup \{\neg \varphi\}$ μη ικανοποίησιμο
 - ($\neg \varphi$ ταυτολογία) $\Rightarrow T_0$ μη ικανοποίησιμο, άτοπο!