Βασικές Έννοιες στη Συνδυαστική Απαρίθμηση

Δημήτρης Φωτάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Email: fotakis@cs.ntua.gr

1 Στοιχειώδης Συνδυαστική Απαρίθμηση

Αντικείμενο. Να μετρήσουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να συμβούν διάφορα γεγονότα χρησιμοποιώντας συνδυαστικά επιχειρήματα.

Κανόνας γινομένου. Αφορά μόνο *ανεξάρτητα* γεγονότα, δηλαδή γεγονότα που το αποτέλεσμα του ενός δεν εξαρτάται με κανένα τρόπο από το αποτέλεσμα του άλλου[1]. Αν έχουμε τα ανεξάρτητα γεγονότα A και B, και το γεγονός A συμβαίνει με n_A τρόπους και το γεγονός B με n_B τρόπους, το A και B συμβαίνει με $n_A \times n_B$ τρόπους.

Παράδειγμα 1. Οι καρκινικές συμβολοσειρές μήκους 10 με κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου (χωρίς τόνους) είναι 24^5, αφού διαλέγουμε το πρώτο, δεύτερο, $\ldots$, πέμπτο γράμμα ανεξάρτητα και με 24 τρόπους το καθένα. Αυτά καθορίζουν και τα πέντε επόμενα γράμματα. Οι επιλογές των πέντε πρώτων γραμμάτων συνιστούν ανεξάρτητα γεγονότα, αφού η επιλογή του ενός γράμματος δεν επηρεάζει με κανένα τρόπο την επιλογή του άλλου. $\square$

Κανόνας αθροίσματος. Αφορά μόνο *αμοιβαία αποκλειόμενα* γεγονότα όπου η εμφάνιση του ενός αποκλείει την ταυτόχρονη εμφάνιση του άλλου. Αν έχουμε τα αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα A και B, και το γεγονός A συμβαίνει με n_A τρόπους και το γεγονός B με n_B τρόπους, το A ή B συμβαίνει με $n_A + n_B$ τρόπους.

Παράδειγμα 2. Έχουμε 24 αριθμημένες (διαφορετικές) πράσινες μπάλες και 24 αριθμημένες κόκκινες μπάλες. Υπάρχουν $24^2 = 576$ διαφορετικοί τρόποι να διαλέξουμε μία πράσινη και μία κόκκινη μπάλα (κανόνας του γινομένου αφού η επιλογή της πράσινης μπάλας είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της κόκκινης μπάλας).

Για να μετρήσουμε τους τρόπους να διαλέξουμε δύο μπάλλες (χωρίς περιορισμό χρώματος) ορίζουμε τα αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα: Διαλέγουμε πράσινη και κόκκινη (24^2 τρόποι), διαλέγουμε δύο κόκκινες ($24 \times 23/2$ τρόποι), και διαλέγουμε δύο πράσινες ($24 \times 23/2$ τρόποι). Εφαρμόζω κανόνα αθροίσματος και έχουμε σύνολο: $24^2 + 12 \times 23 + 12 \times 23 = 1128$ τρόποι. $\square$

Παράδειγμα 3. Έχουμε 5 Ελληνικά, 7 Αγγλικά, και 10 Γερμανικά βιβλία (συνολικά 22). Υπάρχουν $22 \times 21/2 = 231$ διαφορετικοί τρόποι να διαλέξουμε δύο βιβλία (χωρίς περιορισμούς). Όμως αν θέλουμε να διαλέξουμε δύο βιβλία με διαφορετική γλώσσα, έχουμε τις περιπτώσεις

[1] Η ανεξαρτησία δύο γεγονότων Α και Β ελέγχεται πρακτικά με την ερώτηση: "Η γνώση του αποτελέσματος για το γεγονός Α, προσθέτει πληροφορία για το γεγονός Β;" Τα γεγονότα Α και Β είναι ανεξάρτητα όταν η απάντηση είναι "όχι".

(αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα): Διαλέγουμε Ελληνικό και Αγγλικό (35 τρόποι), Αγγλικό και Γερμανικό (70 τρόποι), ή Ελληνικό και Γερμανικό (50 τρόποι). Ο κανόνας αθροίσματος δίνει 155 διαφορετικούς τρόπους. □

2 Μεταθέσεις — Διατάξεις Αντικειμένων

Πόσοι διαφορετικοί τρόποι να βάλουμε ένα σύνολο διακεκριμένων αντικειμένων στη σειρά (δηλαδή η θέση κάθε αντικειμένου έχει σημασία).
Μετάθεσεις n αντικειμένων σε n θέσεις: $n! = n(n-1)\cdots 1 = P(n,n)$.
Διάταξεις n αντικειμένων σε k θέσεις: $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = P(n,k)$.

Παράδειγμα 4. Όταν έχουμε 20 μαθητές και θέλουμε να διαλέξουμε 5 και να τους βάλουμε στη σειρά, υπάρχουν $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = P(20,5) = \frac{20!}{15!}$ διαφορετικοί τρόποι να το κάνουμε. □

2.1 Μεταθέσεις Ομάδων με Όμοια Αντικείμενα.

Έχουμε k διαφορετικές ομάδες αντικειμένων, η πρώτη έχει n_1 ίδια αντικείμενα, η δεύτερη n_2, ..., η k-οστή n_k: $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Οι διαφορετικές μεταθέσεις αυτών των αντικειμένων είναι

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Παράδειγμα 5. Έχουμε 7 α, 8 β, 5 γ, και 4 δ. Μπορούμε να φτιάξουμε $\frac{24!}{7!8!5!4!}$ διαφορετικές συμβολοσειρές με αυτά. □

2.2 Διατάξεις με Επανάληψη.

Έχουμε n αντικείμενα και θέλουμε να διαλέξουμε (με επανάληψη) k από αυτά και να τα βάλουμε στη σειρά. Οι διαφορετικές διατάξεις είναι n^k (n επιλογές για το πρώτο αντικείμενο, n για το δεύτερο, κοκ.).

Είναι ακριβώς το ίδιο με το να τοποθετήσουμε k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές όταν δεν παίζει ρόλο η σειρά των αντικειμένων στις υποδοχές. Πράγματι, το πρώτο αντικείμενο διαλέγει με n τρόπους την υποδοχή του, το δεύτερο επίσης, κοκ.

Παράδειγμα 6. Τετραψήφιοι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα: Διαλέγουμε (με επανάληψη) 4 ψηφία από 10 διαφορετικά ψηφία και έχουμε 10^4 αριθμούς. □

Παράδειγμα 7. n-ψήφιοι αριθμοί στο δυαδικό σύστημα: 2^n. □

Διακεκριμένα Αντικείμενα σε Διακεκριμένες Υποδοχές με τη Σειρά να Έχει Σημασία. Πόσοι είναι οι τρόποι να περάσουν k (διαφορετικά) αυτοκίνητα από n διαφορετικούς υπαλλήλους διοδίων όταν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί τα αυτοκίνητα;

Το πρώτο αυτοκίνητο έχει n επιλογές (όσοι οι υπαλληλοι). Το δεύτερο έχει $n+1$ επιλογές (αν πάει στον υπάλληλο που πήγε και το πρώτο, μπορεί να πάει πριν ή μετά το πρώτο). Ομοίως, το τρίτο έχει $n+2$ επιλογές, ..., και το k-οστό έχει $n+k-1$ επιλογές. Από κανόνα του γινομένου:

$$n(n+1)\cdots(n+k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

3 Συνδυασμοί Αντικειμένων

Αριθμός διαφορετικών επιλογών (συνδυασμών) k από n διαφορετικά αντικείμενα:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{P(n,k)}{k!}$$

Δηλαδή, υπολογίζουμε τις διατάξεις k αντικειμένων από n και διαιρούμε με $k!$ γιατί δεν με ενδιαφέρει η σειρά (στην περίπτωση των συνδυασμών, οι θέσεις των αντικειμένων δεν έχουν σημασία).

Παράδειγμα 8. Πόσες είναι οι διαφορετικές εξάδες του Lotto: $\binom{49}{6}$ □

Άσκηση 1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε τρεις διαφορετικούς αριθμούς από το 1 ως το 300 ώστε το άθροισμά τους να διαιρείται ακριβώς με το 3;

Λύση. Χωρίζουμε τους αριθμούς σε τρεις ομάδες ανάλογα με το υπόλοιπο της ακέραιας διαίρεσής τους με το 3. Στην πρώτη ομάδα μπαίνουν αυτοί που έχουν υπόλοιπο 1 $(1, 4, 7, \ldots)$, στη δεύτερη ομάδα αυτοί που έχουν υπόλοιπο 2 $(2, 5, 8, \ldots)$, και στην τρίτη ομάδα αυτοί που έχουν υπόλοιπο 0 $(3, 6, 9, \ldots)$. Κάθε ομάδα έχει 100 αριθμούς. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο δύο τρόποι να διαλέξουμε τρεις αριθμούς με άθροισμα που να διαιρείται με το 3: Είτε διαλέγουμε έναν αριθμό από κάθε ομάδα (από κανόνα γινομένου, αυτό συμβαίνει με 100^3 τρόπους) είτε διαλέγουμε τρεις αριθμούς από την ίδια ομάδα (από κανόνα αθροίσματος και συνδυασμούς, αυτό συμβαίνει με $3\binom{100}{3}$ τρόπους). Από κανόνα του αθροίσματος, η απάντηση είναι $100^3 + 3\binom{100}{3} = 1485100$. □

3.1 Δυωνυμικοί Συντελεστές

Για κάθε φυσικό αριθμό n και οποιουσδήποτε αριθμούς x, y, το ανάπτυγμα του δυωνύμου $(x+y)^n$ είναι:

$$(x+y)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

Για αυτό οι αριθμοί $C(n,k) = \binom{n}{k}$ είναι γνωστοί ως δυωνυμικοί συντελεστές.

Άσκηση 2. Να αποδείξετε με συνδυαστικά επιχειρήματα ότι
α) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, και
β) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Λύση. α) Έχουμε μία ομάδα n ανθρώπων και k ίδια καπέλα. Το να διαλέξουμε ποιοί k θα φορέσουν καπέλο είναι ίδιο με το να διαλέξουμε αυτούς (ο αριθμός τους είναι $n-k$) που δεν θα φορέσουν καπέλο. Αφού υπάρχει αντιστοιχία, ο αριθμός των διαφορετικών επιλογών και στις δύο περιπτώσεις είναι ο ίδιος.

β) Έχουμε να επιλέξουμε $k+1$ από $n+1$ διαφορετικά αντικείμενα. Είτε θα επιλέξουμε το τελευταίο αντικείμενο ανάμεσα στα $k+1$ και θα επιλέξουμε τα υπόλοιπα k από τα n πρώτα αντικείμενα, είτε δεν θα επιλέξουμε το τελευταίο αντικείμενο ανάμεσα στα $k+1$ και θα επιλέξουμε όλα τα $k+1$ αντικείμενα από τα n πρώτα. Το ζητούμενο προκύπτει από κανόνα του αθροίσματος αφού πρόκειται για αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα. □

Άσκηση 3. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$. Η συνδυαστική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας είναι ότι ο αριθμός των διαφορετικών υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι 2^n.

Λύση. Ξέρουμε ότι για κάθε x, $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i = (1+x)^n$. Το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας $x = 1$. □

Άσκηση 4. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1}$$

Η συνδυαστική ερμηνεία της παραπάνω ισότητας είναι για κάθε σύνολο με n στοιχεία, ο αριθμός των διαφορετικών υποσυνόλων που έχουν άρτιο αριθμό στοιχείων είναι ίσος με τον αριθμό των διαφορετικών υποσυνόλων που έχουν περιττό αριθμό στοιχείων

Λύση. Στο δυωνυμικό ανάπτυγμα $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i = (1+x)^n$, θέτουμε $x = -1$. Το αποτέλεσμα είναι $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0$. Το ζητούμενο προκύπτει διατηρώντας τις άρτιες δυνάμεις του x στο αριστερό μέλος της ισότητας και μεταφέροντας τις περιττές δυνάμεις του x στο δεξιό μέλος. Αφού το άθροισμα των δύο (ίσων) μελών είναι 2^n (βλ. προηγούμενη άσκηση), κάθε μέλος είναι ίσο με 2^{n-1}. □

Άσκηση 5. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Λύση. Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των δυωνυμικών συντελεστών ότι $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ και γράφουμε το ζητούμενο άθροισμα σαν το n-οστό όρο της συνέλιξης της ακολουθίας $\alpha_i = \binom{n}{i}$ με τον εαυτό της. Τυπικά,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} \tag{1}$$

Το δεξί μέλος της ισότητα δίνει τον αριθμό των συνδυασμών n αντικειμένων από $2n$ διαφορετικά αντικείμενα, ο οποίος είναι ίσος με $\binom{2n}{n}$. Ειδικότερα μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την επιλογή n από $2n$ διακεκριμένα αντικείμενα ως εξής: χωρίζουμε τα $2n$ αντικείμενα σε δύο ομάδες των n αντικειμένων η καθεμία (με αυθαίρετο τρόπο). Για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$, επιλέγουμε i αντικείμενα από την 1η ομάδα (υπάρχουν $\binom{n}{i}$ διαφορετικοί συνδυασμοί) και $n - i$ αντικείμενα από την 2η ομάδα (υπάρχουν $\binom{n}{n-i}$ διαφορετικοί συνδυασμοί). Για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$, υπάρχουν συνολικά $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ συνδυασμοί να γίνει αυτό. Τα ενδεχόμενα που αντιστοιχούν στις διαφορετικές τιμές του i είναι αμοιβαία αποκλειόμενα, οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i},$$

το οποίο σε συνδυασμό με την (1) δίνει το ζητούμενο. □

Άσκηση 6. Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.

Λύση. Από το δυωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας, παίρνουμε $n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}x^{i-1}$. Το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας $x = 1$. □

3.2 Συνδυασμοί Αντικειμένων με Επανάληψη

Διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε k αντικείμενα από n διαφορετικά αντικείμενα με επανάληψη:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Είναι το ίδιο με τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων να τοποθετήσουμε k ίδια (μη διακεκριμένα) αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές (κάθε αντικείμενο επιλέγει την υποδοχή του από τις n υποδοχές με επανάληψη).

Παράδειγμα 9. Πόσες δυνατές ζαριές υπάρχουν αν παίζουμε με k ζάρια; Έξι υποδοχές (τα αποτελέσματα για κάθε ζάρι) και τοποθετούμε k ίδια αντικείμενα (τα ζάρια): $\binom{6+k-1}{k}$. □

Παράδειγμα 10. Διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσουμε k μη διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές χωρίς να μείνει καμία κενή ($k \geq n$): Τοποθετούμε από ένα αντικείμενο σε κάθε υποδοχή (1 τρόπος) και τα υπόλοιπα $k-n$ αντικείμενα μοιράζονται με

$$\binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1}$$

διαφορετικούς τρόπους στις n διακεκριμένες υποδοχές χωρίς άλλο περιορισμό. Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί $k-1-(k-n) = n-1$ (βλ. (α) παραπάνω). □

Άσκηση 7. Έχουμε 7 α, 8 β, 5 γ, και 4 δ. Πόσες συμβολοσειρές μπορούμε να φτιάξουμε αν δεν πρέπει να εμφανίζεται το “γα” σε καμία από αυτές;

Λύση. Υπάρχουν $\frac{19!}{7!8!4!}$ διαφορετικές διατάξεις για τα 7 α, τα 8 β, και τα 4 δ χωρίς κανένα περιορισμό. Για κάθε δεδομένη διάταξη των α, β, και δ, θεωρούμε ότι τα γ αποτελούν 5 (ίδια – μη διακεκριμένα) αντικείμενα που τοποθετούνται στις διακεκριμένες υποδοχές που σχηματίζονται από την υπάρχουσα διάταξη. Αφού έχουμε συνολικά 19 γράμματα, αυτά σχηματίζουν 20 διακεκριμένες υποδοχές (19 υποδοχές πριν από κάποιο γράμμα και 1 στο τέλος). Όμως το γ δεν μπορεί να τοποθετηθεί πριν από το α γιατί αυτό θα δημιουργήσει την ακολουθία “γα”. Επομένως, απομένουν 13 υποδοχές για να τοποθετηθεί το γ (ακριβώς πριν από κάποιο β ή πριν από κάποιο δ ή στο τέλος). Συνεπώς, οι διαφορετικοί τρόποι να τοποθετήσουμε τα 5 γ είναι $\binom{13+5-1}{5} = \frac{17!}{5!12!}$. Ο συνολικός αριθμός προκύπτει από τον κανόνα του γινομένου: $\frac{19!}{7!8!4!} \times \frac{17!}{5!12!}$. □

Άσκηση 8. Έχουμε n θέσεις στη σειρά και θέλουμε να τοποθετήσουμε k φοιτητές για να γράψουν εξετάσεις ώστε μεταξύ κάθε δύο φοιτητών να υπάρχει τουλάχιστον μία κενή θέση ($n \geq 2k-1$). Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Ιδέα: Βγάζουμε τους φοιτητές και τα θρανία από την αίθουσα. Δίνουμε από ένα θρανίο σε κάθε φοιτητή (1 τρόπος αφού τα θρανία είναι ίδια, δεσμεύουμε έτσι k θρανία). Βάζουμε πρώτα τους φοιτητές με τα θρανία τους στη σειρά ($k!$ τρόποι αφού οι φοιτητές είναι διαφορετικοί), μετά από ένα άδειο θρανίο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών (1 τρόπος, δεσμεύουμε $k-1$ θρανία), και τέλος τοποθετούμε τα υπόλοιπα θρανία (διανομή $n-2k+1$ μη διακεκριμένων αντικειμένων σε $k+1$ διακεκριμένες υποδοχές).
Λύση. Υπάρχουν $k!$ διαφορετικές μεταθέσεις των φοιτητών (διακεκριμένες οντότητες). Για κάθε μετάθεση βάζουμε τους φοιτητές και ένα κενό μεταξύ τους. Έτσι δεσμεύουμε $2k-1$ θέσεις (k για

τους φοιτητές και $k-1$ για τα κενά μεταξύ τους). Έχουν απομείνει $n-2k+1$ κενές θέσεις (μη διακεκριμένες) να τις μοιράσουμε στις $k+1$ διακεκριμένες υποδοχές που σχηματίζει η μετάθεση των φοιτητών. Αυτό γίνεται με

$$\binom{k+1+n-2k+1-1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{n-2k+1} = \binom{n-k+1}{k}$$

διαφορετικούς τρόπους. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου, προκύπτει το αποτέλεσμα: $k! \times \binom{n-k+1}{k}$. □

4 Υπολογισμός Πιθανότητας (σε Διακριτούς Δειγματοχώρους)

Όταν υπάρχουν n ισοπίθανα ενδεχόμενα (διαφορετικοί τρόποι) να συμβεί κάτι, η πιθανότητα να προκύψει ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο είναι $\frac{1}{n}$.

Παράδειγμα 11. Η πιθανότητα να φέρουμε εξάρες στο τάβλι είναι $\frac{1}{36}$. Η πιθανότητα ένα τουλάχιστον ζάρι να φέρει 6 είναι 1 μείον την πιθανότητα και τα δύο ζάρια να φέρουν κάτι διαφορετικό από 6. Το δεύτερο γεγονός έχει πιθανότητα $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ επειδή η πιθανότητα ένα ζάρι να φέρει κάτι διαφορετικό από 6 είναι $\frac{5}{6}$ και οι ρίψεις των δύο ζαριών είναι ανεξάρτητες. Τελικά, η πιθανότητα ένα τουλάχιστον ζάρι να φέρει 6 είναι $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ □

Άσκηση 9. Αν παίξετε μία στήλη τζόκερ, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσετε;

Λύση. Στο τζόκερ ο αριθμός των διαφορετικών στηλών που μπορούν να κληρωθούν είναι $20\binom{45}{5}$ και όλες οι στήλες είναι ισοπίθανες. Η πιθανότητα επιτυχίας είναι

$$\frac{1}{20\binom{45}{5}} = \frac{5!40!}{20 \cdot 45!} = \frac{1}{24435180}$$

Αν όμως γνωρίζουμε ότι ο πρώτος αριθμός θα είναι στην πρώτη δεκάδα, ο δεύτερος στη δεύτερη, κοκ., και ο τζόκερ άρτιος, τότε ο αριθμός των διαφορετικών στηλών (με αυτούς τους περιορισμούς) είναι 500000 και η πιθανότητα επιτυχίας είναι $\frac{1}{500000}$. □

Παράδειγμα 12. Ένας εκκεντρικός πολυεκατομμυριούχος προτείνει στον πατέρα της(ου) φίλης(ου) σας (επίσης πολυεκατομμυριούχο) να στοιχηματίσουν 100 εκατομμύρια ευρώ ότι αν ρωτήσουν 30 περαστικούς για την ημέρα των γενεθλίων τους, τουλάχιστον 2 από αυτούς θα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα. Ο πατέρας της(ου) φίλης(ου) σας γνωρίζει ότι παρακολουθείτε Διακριτά Μαθηματικά και σας ρωτάει αν πρέπει να αποδεχθεί το στοίχημα ποντάροντας στο ότι κάτι τέτοιο δεν θα συμβεί. Τι απαντάτε; □