Αναδρομικές Σχέσεις «Διαίρει-και-Βασίλευε»

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Διαίρει-και-Βασίλευε

- Γενική μέθοδος σχεδιασμού αλγορίθμων:
  - **Διαίρεση** σε (≥ 2) υποπροβλήματα (σημαντικά) μικρότερου μεγέθους.
  - **Ανεξάρτητη επίλυση** υπο-προβλημάτων (αναδρομικά) (για μικρά υποπροβλήματα εφαρμόζονται στοιχειώδεις αλγόριθμοι).
  - **Σύνθεση** λύσης αρχικού προβλήματος από λύσεις υποπροβλημάτων.
- Ισχυρή μέθοδος, με πολλές σημαντικές εφαρμογές!
  - Ταξινόμηση – Επιλογή: MergeSort, QuickSort, QuickSelect.
  - Πολλαπλασιασμός αριθμών, πινάκων, FFT.
  - «Εξειδίκευση»: Δυαδική αναζήτηση, ύψωση σε δύναμη.
- (Εύκολη) ανάλυση με **αναδρομικές σχέσεις.**
  - Μη γραμμικές, συγκεκριμένης μορφής.

MergeSort

- Πρόβλημα Ταξινόμησης:
  - **Είσοδος** : ακολουθία n αριθμών $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
  - **Έξοδος** : μετάθεση $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ με αριθμούς σε **αύξουσα** σειρά ($\forall i \;\; a'_i \le a'_{i+1}$).
- MergeSort (ταξινόμηση με συγχώνευση):
  - **Διαίρεση** ακολουθίας εισόδου (n στοιχεία) σε δύο υπο-ακολουθίες ίδιου μήκους (n / 2 στοιχεία).
  - **Ταξινόμηση** υπο-ακολουθιών **αναδρομικά**.
  - **Συγχώνευση** (merge) δύο ταξινομημένων υπο-ακολουθιών σε μία ταξινομημένη ακολουθία.

```
MergeSort(int A[], int left, int right) {
        if (left >= right) return;
        mid = (left + right) / 2;
        mergeSort(A, left, mid);
        mergeSort(A, mid+1, right);
        merge(A, left, mid, right); }
```


Χρόνος Εκτέλεσης

- Χρόνος εκτέλεσης merge (για n στοιχεία) : $\Theta(n)$ (γραμμικός)
  - $\Theta(1)$ λειτουργίες για κάθε στοιχείο.
- Χρόνος εκτέλεσης αλγόριθμων «διαίρει-και-βασίλευε» με διατύπωση και λύση αναδρομικής εξίσωσης λειτουργίας.
- $\boldsymbol{T(n)}$: χρόνος (χ.π.) για ταξινόμηση n στοιχείων.
  - $\boldsymbol{T(n/2)}$: ταξινόμηση αριστερού τμήματος (n / 2 στοιχεία).
  - $\boldsymbol{T(n/2)}$: ταξινόμηση δεξιού τμήματος (n / 2 στοιχεία).
  - $\boldsymbol{\Theta(n)}$: συγχώνευση ταξινομημένων τμημάτων.

$$T(n) = 2\,T(n/2) + \Theta(n),\; T(1) = \Theta(1)$$

- Χρόνος εκτέλεσης MergeSort: $\boldsymbol{T(n) = ???}$

Δέντρο Αναδρομής

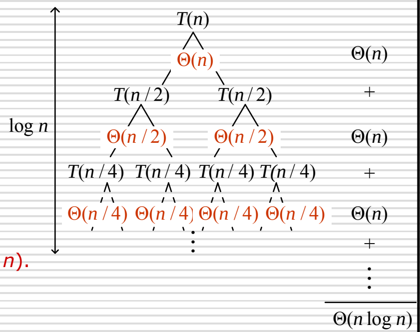
$T(n) = 2\,T(n/2) + \Theta(n)$,
$T(1) = \Theta(1)$

Δέντρο αναδρομής :

Ύψος : $\Theta(\log n)$
#κορυφών : $\Theta(n)$

Χρόνος / επίπεδο : $\Theta(n)$

Συνολικός χρόνος : $\Theta(n \log n)$.



Master Theorem

- Ανάλυση χρόνου εκτέλεσης αλγορίθμων «διαίρει-και-βασίλευε» με αναδρομικές σχέσεις της μορφής
$$T(n) = aT(n/b) + f(n),\, T(1) = \Theta(1)$$
όπου a, b σταθερές και $f(n)$ θετική συνάρτηση.
- Επίλυση με Θεώρημα Κυρίαρχου Όρου (Master Theorem)
  1. Αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
  2. Αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
  3. Αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, και $af(n/b) < f(n)$, τότε $T(n) = \Theta(f(n))$
  - Ασυμπτωτικά μεγαλύτερος από $f(n)$ και $n^{\log_b a}$ καθορίζει λύση.

Παραδείγματα

- $T(n) = 9\,T(n/3) + n$. $T(n) = \Theta(n^2)$ (περ. 1)
- $T(n) = T(2n/3) + 1$. $T(n) = \Theta(\log n)$ (περ. 2)
- $T(n) = 3\,T(n/4) + n \log n$. $T(n) = \Theta(n \log n)$ (περ. 3)
- $T(n) = 2\,T(n/2) + n$. $T(n) = \Theta(n \log n)$ (περ. 2)
- $T(n) = 2\,T(n/2) + n \log n$.
  - Δεν εμπίπτει! Με δέντρο αναδρομής βρίσκουμε ότι $T(n) = \Theta(n \log^2 n)$.

Πολλαπλασιασμός Αριθμών

- Υπολογισμός αθροίσματος $x + y$, x και y αριθμοί n-bits.
  - Κλασσικός αλγόριθμος πρόσθεσης, χρόνος $\Theta(n)$.
- Υπολογισμός γινομένου $x \times y$, x και y αριθμοί με n-bits.
  - Κλασσικός αλγόριθμος πολ/μού, χρόνος $\Theta(n^2)$.
  - Καλύτερος αλγόριθμος;
- Διαίρει-και-Βασίλευε:
  - Διαίρεση: $x = 2^{n/2} x_h + x_l$, $y = 2^{n/2} y_h + y_l$

$$x \times y = 2^n \overbrace{x_h y_h}^{z_h} + 2^{n/2} \overbrace{(x_h y_l + x_l y_h)}^{z_m} + \overbrace{x_l y_l}^{z_l} = 2^n z_h + 2^{n/2} z_m + z_l$$

  - 4 πολλαπλασιασμοί $(n/2)$-bits, 2 ολισθήσεις, 3 προσθέσεις.
  - Χρόνος: $T_1(n) = 4T_1(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow T_1(n) = \Theta(n^2)$

Πολλαπλασιασμός Αριθμών

$$x \times y = 2^n \overbrace{x_h y_h}^{z_h} + 2^{n/2} \overbrace{(x_h y_l + x_l y_h)}^{z_m} + \overbrace{x_l y_l}^{z_l} = 2^n z_h + 2^{n/2} z_m + z_l$$

- Όμως z_m υπολογίζεται με 1 μόνο πολ/μο (n/2+1)-bits.

$$z_m = (x_h + x_l)(y_h + y_l) - x_h y_h - x_l y_l$$

  - 3 πολλαπλασιασμοί (n / 2)-bits, 2 ολισθήσεις, 6 προσθέσεις.
  - Χρόνος: $T(n) = 3T(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$
- Παράδειγμα: 2576 × 7935 = 20440560

$$x_h = 25,\ x_l = 76, \qquad y_h = 79,\ y_l = 35$$
$$z_h = 25 \times 79 = 1975, \quad z_l = 76 \times 35 = 2660$$
$$z_m = (25 + 76)(79 + 35) - 1975 - 2660 =$$
$$= 101 \times 114 - 1975 - 2660 = 11514 - 1975 - 2660 = 6879$$
$$x \times y = 1975 \cdot 10^4 + 6879 \cdot 10^2 + 2660 = 20404560$$

Υπολογισμός Δύναμης (Diffie-Hellman)

- Συμφωνία Αλίκης και Βασίλη σε κρυπτογραφικό κλειδί. Εύα παρακολουθεί για να «κλέψει» το κλειδί.
- Α, Β συμφωνούν δημόσια σε πρώτο p και ακέραιο $q < p$. Ε γνωρίζει p, q.
  - Εμπλεκόμενοι αριθμοί είναι πολυψήφιοι (π.χ. 512 ψηφία).
- Α διαλέγει τυχαία $a < p$ και υπολογίζει $q_a = q^a \bmod p$
  Β διαλέγει τυχαία $b < p$ και υπολογίζει $q_b = q^b \bmod p$
  Α, Β ανταλλάσσουν q_a, q_b και τα μαθαίνει Ε.
- Α, Β υπολογίζουν K (μόνοι τους). Ε δεν ξέρει K.

$$K = q_b^a \bmod p = (q^b \bmod p)^a \bmod p = q^{ab} \bmod p$$

- Για K, Ε χρειάζεται a, b (δεν μεταδόθηκαν). Επίλυση διακριτού λογαρίθμου (πολύ δύσκολο).

Υπολογισμός Δύναμης

- Εφαρμογή υποθέτει **αποδοτικό** αλγόριθμο υπολογισμού $\exp(x, n, p) = x^n \bmod p$, x, n, p πολυψήφιοι ακέραιοι.
  - Υπολογισμός δυνάμεων με τη σειρά (1, 2, 3, …): αν μήκος 512 bits, χρειάζεται περίπου 2^{512} πολ/μους!!!
- Διαίρει-και-Βασίλευε (έστω n άρτιος):
  - Υπολογίζουμε αναδρομικά $\exp(x, n/2, p) = x^{n/2} \bmod p$
  - … και $\exp(x, n, p) = \exp(x, n/2, p) \times \exp(x, n/2, p)$
- #πολλαπλασιασμών:

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$
$$\Rightarrow T(n) = O(\log n)$$

  - p με μήκος 512 bits: περίπου 2^{10} πολ/μους.

$\mathrm{ExponRec}(x, n, p)$
  if $n = 1$ **then return**$(x \bmod p)$;
  $t \leftarrow \mathrm{ExponRec}(x, \lfloor n/2 \rfloor, p)$;
  $t \leftarrow t^2 \bmod p$;
  if n **is odd then return**$(t \times x \bmod p)$;
  else return(t);

(Αντι)παράδειγμα

- Υπολογισμός n-οστού όρου ακολουθίας Fibonacci.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2$$
$$f_0 = 0,\ f_1 = 1$$

```
long fibRec(long n) {
  if (n <= 1) return(n);
  return(fibRec(n-1) + fibRec(n-2)); }
```

- Χρόνος εκτέλεσης:

$$T(n) = \Theta(1) + T(n-1) + T(n-2),\quad T(1) = \Theta(1)$$

- Λύση: $T(n) = \Theta(\varphi^n)$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$
- Επικαλυπτόμενα στιγμ.: Εκθετικός χρόνος!
- Αλγόριθμος γραμμικού χρόνου;
- Καλύτερος αλγόριθμος;

```
fib(n) {
  int cur = 1, prev = 0;
  for (i = 2; i <= n; i++) {
    cur = cur + prev;
    prev = cur - prev; }
  return(cur);  }
```

Ακολουθία Fibonacci

- Ακολουθία Fibonacci: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2$, $f_0 = 0,\ f_1 = 1$
- Θεωρούμε πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $F_n = [f_n, f_{n-1}]$
  - Παρατηρούμε ότι $A \times F_n = [f_n + f_{n-1}, f_n] = F_{n+1}$
  - Με επαγωγή αποδεικνύουμε ότι $F_n = A^{n-1} \times F_1,\ F_1 = [1, 0]$
- Διαίρει-και-Βασίλευε:
  - Υπολογισμός A^n σε χρόνο O(log *n*) (όπως με αριθμούς).
  - Υπολογίζω αναδρομικά το $A^{n/2}$ και $A^n = A^{n/2} \times A^{n/2}$
  - Χρόνος: $T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \Rightarrow T(n) = \Theta(\log n)$