(Γραμμικές) Αναδρομικές Σχέσεις

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

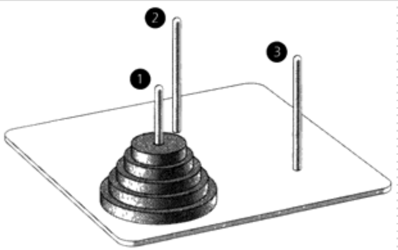
Αναδρομικές Σχέσεις

- Αναπαράσταση ακολουθίας **α** εκφράζοντας a_n ως συνάρτηση a_{n-1}, a_{n-2}, …, με δεδομένες αρχικές συνθήκες.
  - Ακολουθία Fibonacci $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 1$ και $F_1 = 1$. Συχνά $F_0 = 0$ και $F_1 = 1$ ως αρχικές συνθήκες.
  - Γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ: $a_n = \lambda a_{n-1}$, $a_0 = 1$.
  - Αριθμητική πρόοδος με βήμα ω: $a_n = a_{n-1} + \omega$, $a_0 = 0$.
  - Άθροισμα n πρώτων φυσικών: $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 0$.
- Αναδρομικές σχέσεις προκύπτουν «φυσιολογικά» από την περιγραφή του προβλήματος.
  - Ανάλυση αναδρομικών αλγορίθμων, συνδυαστική, ...
- «Επίλυση» για υπολογισμό n-οστού όρου: όχι πάντα εύκολη.
  - Γραμμικές σχέσεις με σταθερούς συντελεστές.
  - Σχέσεις που προκύπτουν από διαίρει-και-βασίλευε αλγόριθμους.

Παράδειγμα

- Οι Πύργοι του Ανόι: #κινήσεων ώστε n δίσκοι, όλοι διαφορετικού μεγέθους, να μεταφερθούν από αριστερά στα δεξιά χωρίς κάποιος δίσκος να βρεθεί πάνω από κάποιον άλλο μικρότερο.
  - T(n): #κινήσεων για n ≥ 1 δίσκους.
  - Αρχική συνθήκη: T(0) = 0, T(1) = 1, T(2) = 3, T(3) = 7, …
  - T(n) = 2T(n-1) + 1

$$T(n) = 2^n - 1$$



Παράδειγμα

- Αναδρομική σχέση για #δυαδικών συμβ/ρών μήκους n που δεν περιέχουν το 00 (δύο συνεχόμενα 0).
  - $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, ...
  - Κάθε συμβ/ρά μήκους n-1 χωρίς 00 δίνει μία συμβ/ρά μήκους n χωρίς 00 με την προσθήκη του ψηφίου 1.
    - Έτσι παίρνουμε a_{n-1} συμβ/ρές μήκους n χωρίς 00.
  - Κάθε συμβ/ρά μήκους n-1 χωρίς 00 που τελειώνει σε 1 δίνει άλλη μία συμβ/ρά μήκους n χωρίς 00 με την προσθήκη του ψηφίου 0.
    - Έτσι παίρνουμε a_{n-2} (διαφορετικές) συμβ/ρές μήκους n χωρίς 00.
  - Συνεπώς $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, με $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Παράδειγμα

- Αναδρομική σχέση για #πενταδικών συμβ/ρών μήκους n με άρτιο αριθμό 0.
  - $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 17$, ...
  - Κάθε συμβ/ρά μήκους n-1 με άρτιο αριθμό 0 δίνει 4 συμβ/ρές μήκους n με άρτιο αριθμό 0, με προσθήκη ενός από τα 1, 2, 3, 4.
    - Έτσι παίρνουμε $4a_{n-1}$ συμβ/ρές μήκους n με άρτιο αριθμό 0.
  - Κάθε συμβ/ρά μήκους n-1 με περιττό αριθμό 0 δίνει 1 συμβ/ρά μήκους n με άρτιο αριθμό 0, με προσθήκη ενός 0.
    - Έτσι παίρνουμε $5^{n-1} - a_{n-1}$ (διαφορετικές) συμβ/ρές μήκους n με άρτιο αριθμό 0.
  - Συνεπώς $a_n = 5^{n-1} + 3a_{n-1}$, με $a_0 = 1$.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις με Σταθερούς Συντελεστές

- Αναδρομική σχέση $C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + \ldots + C_k a_{n-k} = f(n)$ όπου $C_0, \ldots, C_k$ σταθερές, καλείται γραμμική αναδρομική σχέση με σταθερούς συντελεστές και οδηγό συνάρτηση f(n).
  - Αν $C_0 \neq 0$ και $C_k \neq 0$, είναι τάξης k.
  - Αν f(n) = 0, είναι ομογενής.
  - Π.χ. $a_n + a_{n-1} = 2^n$, $a_n - 2a_{n-3} = 0$, $a_n - 2a_{n-5} + a_{n-10} = n^3$
- Ακολουθία (ή «λύση») της σχέσης προσδιορίζεται **μοναδικά** από τιμές k αρχικών (ή διαδοχικών) όρων (αρχικές συνθήκες).
  - Αν δίνονται τιμές < k όρων (ή μη διαδοχικών), μπορεί > 1 «λύσεις».
  - Αν δίνονται τιμές > k διαδοχικών όρων, μπορεί καμία «λύση».
- «Λύση»: άθροισμα ομογενούς λύσης και ειδικής λύσης.
  - Ομογενής λύση: προκύπτει από ομογενή και αρχικές συνθήκες.
  - Ειδική λύση: προκύπτει από οδηγό συνάρτηση f(n).

Ομογενής Λύση

- Αναζητούμε λύσεις της μορφής $a_n = x^n$, $x \neq 0$. Έτσι θεωρούμε την:

$$C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{k-1} x^{n-k+1} + C_k x^{n-k} = 0$$

- ... που είναι ισοδύναμη με την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$C_0 x^k + C_1 x^{k-1} + C_2 x^{k-2} + \ldots + C_{k-1} x + C_k = 0$$

  - Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση που η χ.ε. έχει πραγματικές ρίζες.
- Αν η χ.ε. έχει k ρίζες $x_1, \ldots, x_k$ πολλαπλότητας 1, ομογενής λύση:

$$a_n^{(h)} = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_k x_k^n$$

- $A_1, \ldots, A_k$ σταθερές που προσδιορίζονται από αρχικές συνθήκες.
  - Αφού τα x_i ρίζες της χ.ε., κάθε $A_i x_i^n$ επαληθεύει την ομογενή σχέση.
- Αυτή η διαδικασία οδηγεί στη συνολική λύση για ομογενείς αναδρομικές σχέσεις (π.χ Fibonacci).

Ομογενής Λύση: Παραδείγματα

- $a_n = 4a_{n-2}$ με $a_0 = 2$ και $a_1 = 0$:
  - Χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - 4 = 0$ με ρίζες 2 και -2.
  - Μορφή (ομογενούς) λύσης $a_n = A_1 2^n + A_2 (-2)^n$
  - n = 0: $2 = A_1 + A_2$ Τελικά έχουμε $A_1 = A_2 = 1$.
    n = 1: $0 = 2A_1 - 2A_2$
  - (Ομογενής) λύση $a_n = 2^n + (-2)^n$
  - Αν $a_0 = 1$ και $a_1 = 2$, τότε $a_n = 2^n$
- $a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} = 0$ με $a_0 = 2$ και $a_1 = -1$.
  - Χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - 6x + 8 = 0$ με ρίζες 2 και 4.
  - Μορφή (ομογενούς) λύσης $a_n = A_1 2^n + A_2 4^n$
  - n = 0: $2 = A_1 + A_2$ Τελικά έχουμε $A_1 = 9/2$ και $A_2 = -5/2$.
    n = 1: $-1 = 2A_1 + 4A_2$
  - (Ομογενής) λύση $a_n = 9\ 2^{n-1} - 10\ 4^{n-1}$

Ομογενής Λύση: Πολλαπλές Ρίζες

- Αν χ.ε. έχει κάποια ρίζα x_1 πολλαπλότητας m, τμήμα ομογενούς λύσης που αντιστοιχεί στην x_1 είναι:

$$a_n^{(h,1)} = (A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2} + \dots + A_{m-1} n + A_m) x_1^n$$

  - Ομογενής σχέση επαληθεύεται από κάθε $A_i\, n^{m-i}\, x_1^n$ γιατί x_1 αποτελεί ρίζα της χ.ε. και της 1ης, 2ης, …, (m-1)-οστής παραγώγου της.
- Π.χ. $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$ με $a_0 = 1$ και $a_1 = 6$.
  - Χαρακτηριστική εξίσωση $x^2 - 6x + 9 = 0$ με διπλή ρίζα 3.
  - Μορφή (ομογενούς) λύσης $a_n = A_1\, n\, 3^n + A_2\, 3^n$
  - $n = 0$: $1 = A_2$ Τελικά έχουμε $A_1 = A_2 = 1$.
    $n = 1$: $6 = 3A_1 + 3A_2$
  - (Ομογενής) λύση $a_n = (n+1)3^n$

Ειδική Λύση

- … όταν η οδηγός συνάρτηση είναι γινόμενο πολυωνύμου του n με εκθετική συνάρτηση του n. Θεωρούμε οδηγό συνάρτηση:

$$f(n) = (c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \dots + c_1 n + c_0)\beta^n$$

  - Αν f(n) είναι πολυώνυμο, θεωρούμε ότι $\beta = 1$.
- Όταν β **δεν** είναι ρίζα της χ.ε., τότε ειδική λύση:

$$a_n^{(p)} = (P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \dots + P_t n + P_{t+1})\beta^n$$

- Όταν β ρίζα της χ.ε. πολλαπλότητας m, τότε ειδική λύση:

$$a_n^{(p)} = n^m (P_1 n^t + P_2 n^{t-1} + \dots + P_t n + P_{t+1})\beta^n$$

- $P_1, \dots, P_{t+1}$ σταθερές που προσδιορίζονται ώστε η ειδική λύση να ικανοποιεί την αναδρομική σχέση με οδηγό συνάρτηση f(n).

Ειδική Λύση: Παραδείγματα

- $a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} = 3n^2 - 14n + 12$.
  - Το $\beta = 1$ δεν είναι ρίζα της χ.ε.
  - Μορφή ειδικής λύσης: $a_n^{(p)} = P_1\, n^2 + P_2\, n + P_3$
  - Προσδιορίζουμε τα P_1, P_2, P_3 αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση και εξισώνοντας συντελεστές αντίστοιχων όρων:

$$a_n^{(p)} = [P_1n^2+P_2n+P_3] - 6[P_1(n-1)^2+P_2(n-1)+P_3] + 8[P_1(n-2)^2+P_2(n-2)+P_3]$$
$$= 3P_1n^2 + [-20P_1 + 3P_2]n + [26P_1 - 10P_2 + 3P_3] = 3n^2 - 14n + 12$$

  - Άρα $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, και $P_3 = 2$.
  - Ειδική λύση: $a_n^{(p)} = n^2 + 2n + 2$

Ειδική Λύση: Παραδείγματα

- $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = (n+1)\, 2^n$
  - Το $\beta = 2$ δεν είναι ρίζα της χ.ε. (η χ.ε. έχει ρίζες 1 και 3).
  - Μορφή ειδικής λύσης: $a_n^{(p)} = (P_1\, n + P_2)\, 2^n$
  - Προσδιορίζουμε τα P_1, P_2 αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση και εξισώνοντας συντελεστές αντίστοιχων όρων:

$$a_n^{(p)} = [P_1 n + P_2]\,2^n - 4[P_1(n-1) + P_2]\,2^{n-1} + 3[P_1(n-2) + P_2]\,2^{n-2}$$
$$= [\tfrac{-P_1}{4}\, n + (\tfrac{P_1}{2} - \tfrac{P_2}{4})]\,2^n = (n+1)2^n$$

  - Άρα $P_1 = -4$ και $P_2 = -12$.
  - Ειδική λύση: $a_n^{(p)} = -(4n + 12)\, 2^n$

Ειδική Λύση: Παραδείγματα

- $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (n+1)\, 2^n$
  - Το $\beta = 2$ **είναι** ρίζα της χ.ε. πολλαπλότητας 2.
  - Μορφή ειδικής λύσης: $a_n^{(p)} = n^2 (P_1 n + P_2)\, 2^n$
  - Προσδιορίζουμε τα P_1, P_2 αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση και εξισώνοντας συντελεστές αντίστοιχων όρων:

$$a_n^{(p)} = n^2 [P_1 n + P_2]\, 2^n - 4(n-1)^2 [P_1(n-1) + P_2]\, 2^{n-1} + 4(n-2)^2 [P_1(n-2) + P_2]\, 2^{n-2}$$
$$= [6P_1 n + (2P_2 - 6P_1)]\, 2^n = (n+1) 2^n$$

  - Άρα $P_1 = 1/6$ και $P_2 = 1$.
  - Ειδική λύση: $a_n^{(p)} = (n^3 / 6 + n^2)\, 2^n$

Ειδική Λύση: Παραδείγματα

- $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = (n^2+1)\, 3^n$
  - Το $\beta = 3$ **είναι** ρίζα της χ.ε. πολλαπλότητας 2.
  - Μορφή ειδικής λύσης: $a_n^{(p)} = n^2 (P_1 n^2 + P_2 n + P_3)\, 3^n$
  - Προσδιορίζουμε τα P_1, P_2, P_3 αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση και εξισώνοντας συντελεστές αντίστοιχων όρων:

$$a_n^{(p)} = n^2 [P_1 n^2 + P_2 n + P_3] 3^n - 6(n-1)^2 [P_1 (n-1)^2 + P_2 (n-1) + P_3] 3^{n-1}$$
$$+ 9(n-2)^2 [P_1 (n-2)^2 + P_2 (n-2) + P_3] 3^{n-2}$$
$$= [12 P_1 n^2 + (-24 P_1 + 6 P_2) n + (14 P_1 - 6 P_2 + 2 P_3)] 3^n = (n^2+1) 3^n$$

  - Άρα $P_1 = 1/12$, $P_2 = 1/3$, και $P_3 = 11/12$.
  - Ειδική λύση: $a_n^{(p)} = n^2 (n^2/12 + n/3 + 11/12)\, 3^n$

Συνολική Λύση

- Υπολογίζουμε την ειδική λύση (γενική μορφή και τιμές των P_i).
- Υπολογίζουμε την ομογενή λύση χωρίς τιμές για τα A_i .
- Προσδιορίζουμε τα A_i από το άθροισμα ειδικής και ομογενούς λύσεις για αρχικές συνθήκες.
  - Λύση που ικανοποιεί αναδρομική σχέση (ειδική λύση) και τις αρχικές συνθήκες (ομογενής λύση).
  - Μορφή συνολικής λύσης **δεν** εξαρτάται από αρχικές συνθήκες.
  - Μόνο συντελεστές A_i ομογενούς λύσης εξαρτώνται από αρχικές συνθήκες.

Συνολική Λύση: Παραδείγματα

- $a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} = 3n^2 - 14n + 12$ με $a_0 = 1$ και $a_1 = 4$.

$$a_n^{(p)} = n^2 + 2n + 2 \quad \text{και} \quad a_n^{(h)} = A_1 2^n + A_2 4^n$$
$$n = 0 \quad a_0^{(p)} + a_0^{(h)} = 2 + A_1 + A_2 = 1 = a_0$$
$$n = 1 \quad a_1^{(p)} + a_1^{(h)} = 5 + 2A_1 + 4A_2 = 5 = a_1$$

  - $A_1 = -3/2$ και $A_2 = 1/2$
  - Συνολική λύση $a_n = n^2 + 2n + 2 - 3\, 2^{n-1} + 2\, 4^{n-1}$
- $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (n+1)\, 2^n$ με $a_0 = 0$ και $a_1 = 2$.

$$a_n^{(p)} = (n^3/6 + n^2)\, 2^n \quad \text{και} \quad a_n^{(h)} = (A_1 n + A_2)\, 2^n$$
$$n = 0 \quad a_0^{(p)} + a_0^{(h)} = A_2 = 0 = a_0$$
$$n = 1 \quad a_1^{(p)} + a_1^{(h)} = 7/3 + 2A_1 + 2A_2 = 2 = a_1$$

  - $A_1 = -1/6$ και $A_2 = 0$
  - Συνολική λύση $a_n = -(1/6)\, n\, 2^n (n^2 + 6n - 1)$

Επίλυση με Γεννήτριες Συναρτήσεις

- Για γραμμικές αναδρομικές σχέσεις με σταθερούς συντελεστές είναι (συνήθως) εύκολο να υπολογίσουμε τη ΓΣ της ακολουθίας.
  - Η ακολουθία που αντιστοιχεί στη ΓΣ αποτελεί τη «λύση» της σχέσης.
- Παράδειγμα (πύργοι του Ανόι): $a_n - 2a_{n-1} = 1$ με $a_0 = 0$.
  - Για κάθε $n \geq 1$ πολλαπλασιάζουμε με x^n και αθροίζουμε: $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$
  - Αν συμβολίσ. με A(x) τη ΓΣ της a_n έχουμε τώρα μια σχέση για A(x): $$(A(x) - a_0) - 2xA(x) = \frac{x}{1-x}$$
  - Χρησιμοποιώντας $a_0 = 0$ και λύνοντας ως προς A(x): $$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$
  - Κλασματική ανάλυση: $$A(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$
  - «Λύση»: $a_n = 2^n - 1$

Επίλυση με Γεννήτριες Συναρτήσεις

- Παράδειγμα: $a_n - 3a_{n-1} = 5^{n-1}$ με $a_0 = 1$.
  - Για κάθε $n \geq 1$ πολλαπλασιάζουμε με x^n και αθροίζουμε: $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 5^{n-1} x^n$$
  - Αν συμβολίσ. με A(x) τη ΓΣ της a_n έχουμε τώρα μια σχέση για A(x): $$(A(x) - a_0) - 3xA(x) = \frac{x}{1-5x}$$
  - Χρησιμοποιώντας $a_0 = 1$ και λύνοντας ως προς A(x): $$A(x) = \left(\frac{x}{1-5x} + 1\right)\frac{1}{1-3x} = \frac{1-4x}{(1-5x)(1-3x)}$$
  - Κλασματική ανάλυση: $$A(x) = \frac{1/2}{1-5x} + \frac{1/2}{1-3x}$$
  - «Λύση»: $a_n = (5^n + 3^n)/2$