Συνδυαστική Απαρίθμηση

Διδάσκοντες: **Φ. Αφράτη, Δ. Φωτάκης**

Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Παραδείγματα

- n θρανία στη σειρά για k φοιτητές που εξετάζονται (n ≥ 2k-1). #τοποθετήσεων ώστε τουλάχιστον μια κενή θέση ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι φοιτητών.
  - Μεταθέσεις k φοιτητών: k! (καταλαμβάνουν k θρανία).
  - Τοποθετούμε k–1 θρανία ανάμεσά τους.
  - Υπόλοιπα n–2k+1 (ίδια) θρανία στις k+1 διακεκριμένες «υποδοχές» στην αρχή, στο τέλος, και ανάμεσα σε φοιτητές.
    - C((k+1) + (n–2k+1) – 1, n-2k+1) = C(n–k+1, n-2k+1)
      = C(n–k+1, k)
  - Τελικά C(n–k+1, k) k! = (n-k+1)!/(n-2k+1)!
  - Διαφορετικά μεταθέσεις (με ομάδες) k διαφορετικών αντικειμένων (φοιτητών) και n-2k+1 ίδιων αντικειμένων (ελεύθερων θρανίων).

Παραδείγματα

- 2n+1 κοινοβουλευτικές έδρες να μοιραστούν σε 3 κόμματα ώστε αν οποιαδήποτε 2 συμφωνούν να έχουν πλειοψηφία.
  - #διανομών 2n+1 (ίδιες) μπάλες σε 3 διακεκριμένες υποδοχές ώστε κάθε υποδοχή ≤ n μπάλες.
  - #διανομών χωρίς περιορισμούς: $\binom{2n+1+3-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2n+1} = \binom{2n+3}{2}$
  - #διανομών όπου κάποια υποδοχή έχει ≥ n+1 μπάλες:
    - Επιλέγουμε (με 3 τρόπους) υποδοχή με «πλειοψηφία».
    - Τοποθετούμε σε αυτή n+1 μπάλες.
    - #διανομών υπόλοιπων n μπαλών στις 3 υποδοχές:

$$\binom{n+3-1}{n} = \binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2}$$

  - Τελικά #διανομών: $\binom{2n+3}{2} - 3\binom{n+2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Παραδείγματα

- Πόσα υποσύνολα 4 στοιχείων του A = {1, ..., 15} **δεν** περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς;
  - Υποσύνολο ως 4άδα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ όπου $1 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 \le 15$
  - 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τέτοιων 4άδων $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ και λύσεων της εξίσωσης $\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5=14$ στους φυσικούς με $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \ge 1$:

$$1+\beta_1=\alpha_1 \quad \alpha_1+\beta_2=\alpha_2$$
$$\alpha_2+\beta_3=\alpha_3 \quad \alpha_3+\beta_4=\alpha_4$$
$$\alpha_4+\beta_5=15$$

  - Για να μην είναι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ διαδοχικοί, πρέπει $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \ge 2$.
  - Διανομή 14 ίδιων μπαλών σε 5 διαφορετικές υποδοχές, ώστε υποδοχές 2, 3, και 4 να έχουν τουλάχιστον 2 μπάλες.
  - Αποτέλεσμα: C(12, 8) = C(12, 4) = 495.
- Να γενικεύσετε για #υποσυνόλων k στοιχείων του {1, ..., n} που δεν περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς.

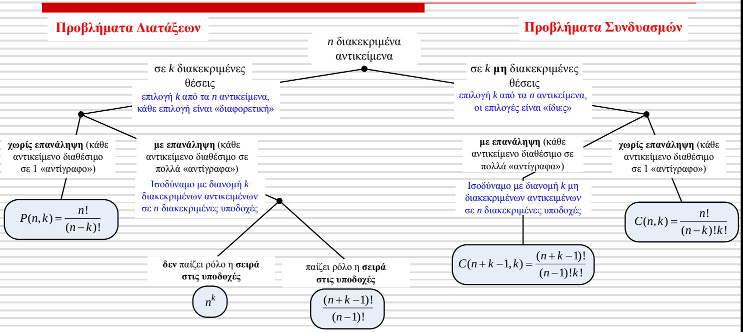
Παραδείγματα

- Έστω το «τετράγωνο» που ορίζεται από τα σημεία (0, 0), (0, 8), (10, 0), και (10, 8).
- Πόσα διαφορετικά «μονοπάτια» από το (0, 0) στο (10, 8), αν σε κάθε βήμα μετακινούμαστε είτε κατά μια μονάδα προς τα πάνω είτε κατά μια μονάδα προς τα δεξιά.
  - Πρέπει να κάνουμε 8 βήματα **Π**άνω και 10 βήματα **Δ**εξιά.
  - #μονοπατιών = #μεταθέσεων 8 Π και 10 Δ = 18!/(10! 8!)

Υποσύνολα Πολυσυνόλου

- #υποσύνολων πολυσυνόλου με k στοιχεία όπου κάθε στοιχείο p είναι διαθέσιμο σε n_p «αντίγραφα».
  - $(1+n_1)(1+n_2) \dots (1+n_k)$
  - Για #μη κενών υποσυνόλων: $(1+n_1)(1+n_2) \dots (1+n_k) - 1$
- #διαιρετών του 180;
  - Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $180 = 2^2\, 3^2\, 5$.
  - #διαιρετών 180 = #υποσυνόλων {{2, 2}, {3, 3}, {5}}
  - #διαιρετών του 180 = 3×3×2 = 18.
- #διαιρετών του 1400;
  - Ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $1400 = 2^3\, 5^2\, 7$.
  - #διαιρετών 1400 = #υποσυνόλων {{2, 2, 2}, {5, 5}, {7}}
  - #διαιρετών του 1400 = 4×3×2 = 24.

Ανακεφαλαίωση



Μεταθέσεις $(n = k)$: $P(n,n) = n!$

Μεταθέσεις n αντικειμένων όταν έχουμε k **ομάδες** ίδιων αντικ. με πληθάριθμο $n_1, \dots, n_k$: $\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$

Δυωνυμικοί Συντελεστές

- Δυωνυμικό Θεώρημα: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^{n-k} y^k$
- Ως άμεση συνέπεια: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
  - Προκύπτει συνδυαστικά ως #υποσυνόλων συνόλου με n στοιχεία.
  - Με x = 1 και y = −1:
    $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \Rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$
  - Απόδειξη για αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = 1$
  - Για x = 2 και y = 1: $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$

Ταυτότητα του Pascal

- Ταυτότητα του Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
  - #τρόπων να επιλέξουμε k από n αντικείμενα:
    - είτε επιλέγουμε το τελευταίο και επιλέγουμε τα άλλα k–1 από τα υπόλοιπα n-1 αντικείμενα,
    - είτε δεν επιλέγουμε το τελευταίο και επιλέγουμε όλα τα k από τα υπόλοιπα n-1 αντικείμενα.

Τρίγωνο του Pascal

- Αναδρομική σχέση για υπολογισμό δυωνυμικών συντελεστών:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{αν } 0 < k < n \\ 1 & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

- Η τεχνική σήμερα είναι γνωστή ως δυναμικός προγραμματισμός.

n										
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Ταυτότητα Vandermonde

- Ταυτότητα Vandermonde: $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$
  - #τρόπων να επιλέξουμε r από n (αριθμημένες) πράσινες μπάλες και m (αριθμημένες) κόκκινες μπάλες:
    - Επιλέγουμε r – k από m κόκκινες k από n πράσινες με C(m, r – k) × C(n, k) τρόπους.
    - Αμοιβαία αποκλειόμενα ενδεχόμενα για διαφορετικές τιμές του k.
- Άμεση συνέπεια: $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Δημιουργία Μεταθέσεων

1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 2 4
1 3 4 2
1 4 2 3
1 4 3 2
2 1 3 4
2 1 4 3
2 3 1 4
2 3 4 1
2 4 1 3
2 4 3 1
3 1 2 4

- … n αντικειμένων σε λεξικογραφική σειρά.
  - Συνάρτηση που επιστρέφει (λεξικογραφικά) επόμενη μετάθεση.
  - Ελάχιστη: αντικείμενα σε αύξουσα σειρά.
  - Μέγιστη: αντικείμενα σε φθίνουσα σειρά.
- Δεδομένης μετάθεσης $a_1 a_2 \ldots a_n$:
  - Υπολόγισε ελάχιστη δυνατή κατάληξη που επιδέχεται (λεξικογραφικής) αύξησης.
  - Υπολογισμός επόμενης μετάθεσης (που δεν έχει εμφανιστεί ήδη ως κατάληξη) για αυτή την κατάληξη.

4 3 2 1

Δημιουργία Μεταθέσεων

- Δεδομένης μετάθεσης $a_1 a_2 \ldots a_n$:
  - Μέγιστος δείκτης j τ.ω. $a_j < a_{j+1}$ (άρα $a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots a_{n-1} > a_n$)
- Επόμενη μετάθεση $a'_1\, a'_2 \ldots a'_n$:
  - Πρόθεμα $a_1 \ldots a_{j-1}$ αμετάβλητο.
  - a'_j = ελάχιστο από τα $a_{j+1}, \ldots, a_n$ που «ξεπερνά» το a_j.
  - Υπόλοιπα από τα $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n$ (εκτός αυτού που πήρε θέση j) σε αύξουσα σειρά.
  - **36**2541 → 364125
  - **4**8765321 → 51234678

1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 2 4
1 3 4 2
1 4 2 3
1 4 3 2
2 1 3 4
2 1 4 3
2 3 1 4
2 3 4 1
2 4 1 3
2 4 3 1
3 1 2 4
3 1 4 2
3 2 1 4
3 2 4 1
3 4 1 2
3 4 2 1
4 1 2 3
4 1 3 2
4 2 1 3
4 2 3 1
4 3 1 2
4 3 2 1

Δημιουργία Μεταθέσεων

- Υλοποίηση:
  - Μέγιστο j τ.ω. $a_j < a_{j+1}$.
  - Ισχύει ότι $a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots > a_n$.
  - Μετά την αντιμετάθεση των a_j και a_k, τα $a_{j+1}, \ldots, a_n$ είναι ταξινομημένα σε φθίνουσα σειρά.
  - Αντιμετάθεση ζευγών (a_{j+1}, a_n), (a_{j+2}, a_{n-1}), κοκ. καταλήγει σε ταξινόμηση σε αύξουσα σειρά.
- Υλοποίηση χωρίς ταξινόμηση σε χρόνο O(n).

```
NextPermutation(a1a2...an)
/* a1a2...an όχι τελευταία */
   j := n − 1;
   while aj > aj+1 do
      j := j − 1;
   k := n;
   while aj > ak do
      k := k − 1;
   swap(aj, ak);
   r := n;   s := j + 1;
   while r > s do
      swap(ar, as);
      r := r − 1;   s := s + 1;
```


Δημιουργία Συνδυασμών

- Όλοι οι (2^n) συνδυασμοί n αντικειμένων: δημιουργία δυαδικών αριθμών μήκους n.
- Δημιουργία όλων των συνδυασμών k αντικειμένων από n σε λεξικογραφική σειρά.
  - Συνάρτηση για επόμενο συνδυασμό.
  - Αντικείμενα σε αύξουσα σειρά.
  - Ελάχιστος: 1 2 … k. Μέγιστος: (n − k +1) … n
- Δεδομένης μετάθεσης $a_1 a_2 \ldots a_n$:
  - Υπολόγισε ελάχιστη δυνατή κατάληξη που επιδέχεται αύξησης.
  - Αύξηση λαμβάνει υπόψη ότι έχουμε συνδυασμούς.

1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 4 5
1 2 4 6
1 2 5 6
1 3 4 5
1 3 4 6
1 3 5 6

3 4 5 6

Δημιουργία Συνδυασμών

- Δεδομένου συνδυασμού $a_1 a_2 \ldots a_k$:
  - Μέγιστος δείκτης j τ.ω. $a_j \neq n-k+j$ (άρα $a_{j+1} \ldots a_k$ μέγιστος συνδυασμός k − j στοιχείων)
- Επόμενος συνδυασμός $a'_1\, a'_2 \ldots a'_k$:
  - Πρόθεμα $a_1 \ldots a_{j-1}$ αμετάβλητο.
  - $a'_j = a_j + 1$.
  - Τα επόμενα στοιχεία ($a_j + 2$, $a_j + 3$, …) στις υπόλοιπες θέσεις.

1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 4 5
1 2 4 6
1 2 5 6
1 3 4 5
1 3 4 6
1 3 5 6
1 4 5 6
2 3 4 5
2 3 4 6
2 3 5 6
2 4 5 6
3 4 5 6

Δημιουργία Συνδυασμών

- Υλοποίηση σε χρόνο O(k).

Next k**-Combination**$(a_1 a_2 \ldots a_k)$
/* $a_1 a_2 \ldots a_k$ όχι τελευταίος */
$j := k;$
while $a_j = n - k + j$ **do**
$j := j - 1;$
$a_j := a_j + 1; \quad s := a_j + 1$
for $i := j + 1$ **to** k **do**
$a_i := s; \quad s := s + 1;$

Εφαρμογή: Διακριτή Πιθανότητα

- Διακριτός δειγματοχώρος: αριθμήσιμο σύνολο Ω, όπου $\forall \omega \in \Omega$, αντιστοιχούμε $p(\omega) \in [0, 1]$ και $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
  - Γεγονός E: υποσύνολο Ω.
  - p(E) = $\sum_{\omega \in E} p(\omega)$
- Πιθανότητα για 6άρες στο τάβλι: 1/36.
  - Πιθανότητα για 6-5 στο τάβλι: 2/36.
  - Πιθανότητα για ίδιο αποτέλεσμα στα 2 ζάρια: 6*1/36 = 1/6.
- Πιθανότητα αν πάρουμε 6 φύλλα από μία (καλά ανακατεμένη) τράπουλα να έχουμε 4 άσσους;
  - C(48, 2)/C(52, 6).
- Πιθανότητα υπάρχουν 2 από k (τυχαία επιλεγμένους) ανθρώπους να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα;